DM 24 : théorème de Müntz-Szász

Partie I. Distance et gramiens.

Dans cette partie, $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien réel, et F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, possédant une base (pas nécessairement orthonormée) $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

- On note $p = p_F$ le projecteur orthogonal sur F.
- Pour toute famille finie $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ de vecteurs de E, on considère la *matrice gramienne* $\mathrm{Gram}(\mathcal{F}) = (\langle f_i|f_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in M_p(\mathbb{R})$ et son déterminant, le *gramien* $G(\mathcal{F}) = \text{dét}\,\mathrm{Gram}(\mathcal{F})$.
  On rappelle avoir vu en TD que $G(\mathcal{F}) \neq 0$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre.
- On fixe un vecteur $u \in \mathcal{E}$ et on note $\mathcal{B} \vee u$ la famille concaténée $(e_1, \ldots, e_n, u)$.

1. On décompose le projeté orthogonal $p(u)$ dans la base $\mathcal{B}$: on a $p(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i$.

   Montrer que le vecteur $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\mathrm{Gram}(\mathcal{B})\Lambda = \begin{pmatrix} \langle u|e_1\rangle \\ \vdots \\ \langle u|e_n\rangle \end{pmatrix}$.
2. Calculer $d(u,F)^2$ en fonction des coefficients de la dernière ligne de $\mathrm{Gram}(\mathcal{B} \vee u)$.
3. En effectuant sur cette matrice la transformation $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - \lambda_1 C_1 - \cdots - \lambda_n C_n$, montrer

$$d(u,F)^2 = \frac{G(\mathcal{B} \vee u)}{G(\mathcal{B})}.$$

Partie II. Le déterminant de Cauchy.

On fixe $n \geqslant 2$ et deux n-uplets de réels $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ tels que $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_i + b_j \neq 0$.
Le but de cette partie est de montrer $\text{dét}\left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \dfrac{V(a_1, \ldots, a_n)\, V(b_1, \ldots, b_n)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i + b_j)}$, où V désigne le déterminant de Vandermonde.
Ce déterminant est appelé *déterminant de Cauchy* des deux n-uplets.

4. Montrer la formule dans le cas $n = 2$ et dans le cas où deux des a_i sont égaux.

On procède maintenant par récurrence : on suppose que la formule donnée en préambule est correcte pour tous les déterminants de Cauchy $n \times n$, et on fixe $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ et $(b_1, \ldots, b_n, b_{n+1})$ deux $(n+1)$-uplets de réels tels que $\forall i, j \in [\![1, n+1]\!]$, $a_i + b_j \neq 0$. On note alors

$$\Delta_n = \text{dét}\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \overset{\text{HR}}{=} \frac{V(a_1, \ldots, a_n)\, V(b_1, \ldots, b_n)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i + b_j)} \qquad \text{et} \qquad \Delta_{n+1} = \text{dét}\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}.$$

La question précédente permet d'initialiser la récurrence et de supposer que tous les a_i sont différents, ce que l'on fera dans la suite.

5. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$. On note $F = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\lambda_i}{X + a_i} \in \mathbb{C}(X)$.

Montrer que $\lambda_{n+1}\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} & \frac{1}{a_1+b_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} & \frac{1}{a_n+b_{n+1}} \\ F(b_1) & \cdots & F(b_n) & F(b_{n+1}) \end{vmatrix}$.

6. En appliquant ce qui précède à une fraction rationnelle bien choisie, conclure.
Indication. *On pourra s'inspirer de la démonstration du cours sur les déterminants de Vandermonde.*

Partie III. Théorème de Müntz-Szász.

On munit l'espace vectoriel $C^0([0,1])$ du produit scalaire L^2 usuel. Ainsi, on dispose de deux normes (euclidienne et uniforme) sur l'espace $C^0([0,1])$, définies respectivement par les formules $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$ et $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$.
Pour tout $g \in C^0([0,1])$ et tout sous-espace vectoriel F de $C^0([0,1])$, on note

$$d_2(g,F) = \inf\{\|g-f\|_2 \mid f \in F\} \qquad \text{et} \qquad d_\infty(g,F) = \inf\{\|g-f\|_\infty \mid f \in F\}.$$

Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}_+$, on note φ_γ la fonction $x \mapsto x^\gamma$, élément de $C^0([0,1])$.
On considère une suite $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **positive** et **strictement croissante** et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'espace vectoriel $W_n = \mathrm{Vect}(\varphi_{\alpha_0}, \varphi_{\alpha_1}, \dots, \varphi_{\alpha_n})$.
Le but de cette partie est d'étudier les conditions $(\mathbf{D}_2)$ et $(\mathbf{D}_\infty)$ définies par

$$(\mathbf{D}_2):\ \forall g \in C^0([0,1]), d_2(g,W_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad (\mathbf{D}_\infty):\ \forall g \in C^0([0,1]), d_\infty(g,W_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

qui disent, dans un vocabulaire topologique, que l'espace vectoriel $W = \mathrm{Vect}(\varphi_{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est *dense* dans l'espace $C^0([0,1])$ pour la norme L^2 ou la norme uniforme, respectivement.
On pourra librement utiliser le théorème de Weierstrass, démontré dans le cours de probabilités, sous la forme $\forall g \in C^0([0,1]), d_\infty(g, \mathbb{R}_n[X]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

7. **Norme L^2.**
   (a) Montrer $\forall g \in C^0([0,1]), d_2(g, \mathbb{R}_n[X]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   (b) Montrer que la condition $(\mathbf{D}_2)$ équivaut à $\forall m \in \mathbb{N}, d(\varphi_m, W_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   (c) En utilisant les deux parties précédentes, montrer
   $$\forall m \in \mathbb{N}, d_2(\varphi_m, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=0}^{n} \frac{|\alpha_i - m|}{\alpha_i + m + 1}.$$
   (d) Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, α diverge si et seulement si $\frac{|\alpha_i - m|}{\alpha_i + m + 1} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 1$.
   (e) En déduire que la condition $(\mathbf{D}_2)$ est équivalente à la divergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\alpha_n}$.

8. **Norme uniforme.**
   (a) Montrer que si la condition $(\mathbf{D}_\infty)$ est vérifiée, alors $\alpha_0 = 0$.
   (b) Soit $f, g \in C^1([0,1])$ telles que $f(0) = g(0) = 0$. Montrer $\|f-g\|_\infty \leqslant \|f'-g'\|_2$.
   (c) On suppose $\alpha_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n \geqslant 1$ et la divergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\alpha_n}$. Montrer $(\mathbf{D}_\infty)$.