Première composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1

Soit $a \in]0, 1[$. Montrer

$$\forall n \geqslant 2, (1-a)^n < \frac{1}{1+na}.$$

Pour tout $n \geqslant 2$*, on note* $P(n)$ *l'assertion*

$$(1-a)^n < \frac{1}{1+na}.$$

Montrons $\forall n \geqslant 2, P(n)$ *par récurrence (simple).*

Initialisation. *Montrons que* $(1-a)^2 < \dfrac{1}{1+2a}$. *On a*

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2a} - (1-a)^2 &= \frac{1-(1+2a)(1-a)^2}{1+2a}\\ &= \frac{1-(1-2a+a^2+2a-4a^2+2a^3)}{1+2a}\\ &= \frac{3a^2-2a^3}{1+2a}\\ &= \frac{a^2(3-2a)}{1+2a}.\end{aligned}$$

Or, puisque $a \in]0, 1[$*, les trois nombres* a^2, $3-2a$ *et* $1+2a$ *sont strictement positifs, donc la différence est strictement positive, ce qui montre* $P(2)$*.*

Hérédité. *Soit* $n \geqslant 2$ *tel que* $P(n)$*.*

On a

$$(1-a)^{n+1} = (1-a)(1-a)^n < \frac{1-a}{1+na},$$

en multipliant l'inégalité $P(n)$ *de part et d'autre par* $1-a$*, qui est bien* > 0*.*

Pour conclure, il suffirait donc de démontrer que $\dfrac{1-a}{1+na} \leqslant \dfrac{1}{1+(n+1)a}$*. Calculons donc la différence*

$$\frac{1}{1+(n+1)a} - \frac{(1-a)}{1+na} = \frac{1+na-((1-a)(1+(n+1)a))}{(1+na)(1+(n+1)a)} = \frac{(n+1)a^2}{(1+na)(1+(n+1)a)} > 0.$$

On a donc

$$(1-a)^{n+1} < \frac{1-a}{1+na} < \frac{1}{1+(n+1)a},$$

ce qui montre $P(n+1)$*, et clôt la récurrence.*

Exercice 2

Soit $V_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y+z=0\right\}$ et $V_2 = \{(t,2t,3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que tout élément de $\mathbb{R}^3$ s'écrit, de manière unique, comme somme d'un élément de V_1 et d'un élément de V_2.

Soit $w = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrons qu'il existe un unique couple $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ tel que $w = v_1 + v_2$.

On procède par analyse et synthèse.

Analyse. *Soit $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ tel que $v_1 + v_2 = w$.*

Notons $v_1 = (x,y,z)$. Par définition de V_1, on a $x+y+z=0$.

Par définition de v_2, on peut trouver $t \in \mathbb{R}$ tel que $v_2 = (t, 2t, 3t)$.

L'égalité $v_1 + v_2 = w$ donne les égalités $\begin{cases} x+t = a \\ y+2t = b \\ z+3t = c. \end{cases}$

En sommant les trois égalités, on obtient $\underbrace{x+y+z}_{=0} + (t+2t+3t) = a+b+c$, *donc* $t = \dfrac{a+b+c}{6}$.

On en déduit

$$v_2 = \left(\frac{a+b+c}{6}, \frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{2}\right) \text{ et } v_1 = w - v_2 = \left(\frac{5a-b-c}{6}, \frac{2b-a-c}{3}, \frac{c-a-b}{2}\right).$$

Synthèse. *Réciproquement, posons*

$$v_1 = \left(\frac{5a-b-c}{6}, \frac{2b-a-c}{3}, \frac{c-a-b}{2}\right) \text{ et } v_2 = \left(\frac{a+b+c}{6}, \frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{2}\right).$$

- *On a* $\dfrac{5a-b-c}{6} + \dfrac{2b-a-c}{3} + \dfrac{c-a-b}{2} = \dfrac{(5-2-3)a + (-1+4-3)b + (-1-2+3)c}{6} = 0$,
  donc $v_1 \in V_1$.
- *L'écriture* $v_2 = \left(\dfrac{a+b+c}{6}, 2\dfrac{a+b+c}{6}, 3\dfrac{a+b+c}{6}\right)$ *montre* $v_2 \in V_2$.
- *On a*

$$v_1 + v_2 = \left(\frac{5a-b-c}{6} + \frac{a+b+c}{6}, \frac{2b-a-c}{3} + \frac{a+b+c}{3}, \frac{c-a-b}{2} + \frac{a+b+c}{2}\right) = (a,b,c).$$

On a donc bien $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ et $v_1 + v_2 = w$, ce qui conclut.

Exercice 3

1. **Question de cours.** Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Compléter et démontrer les propositions suivantes :
   - si $g \circ f$ est injective, alors [...] ;
   - si $g \circ f$ est surjective, alors [...].

   - *Si* $g \circ f$ *est injective, alors* f *est injective.*
     Supposons $g \circ f$ *injective, et soit* $x_1, x_2 \in E$ *tels que* $f(x_1) = f(x_2)$.
     En appliquant g, *il vient* $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, *c'est-à-dire* $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$.
     Par injectivité de $g \circ f$, *on en déduit* $x_1 = x_2$, *ce qui conclut.*
   - *Si* $g \circ f$ *est surjective, alors* g *est surjective.*
     Supposons $g \circ f$ *surjective, et soit* $z \in G$.
     Par surjectivité de $g \circ f$, *on peut trouver* $x \in E$ *tel que* $(g \circ f)(x) = z$, *c'est-à-dire* $g(f(x)) = z$.
     On a donc trouvé un g*-antécédent à* z, *à savoir* $f(x) \in F$, *ce qui conclut.*

2. Choisir (intelligemment, mais sans justification) un codomaine E pour l'application h ci-dessus, puis montrer que h est bien définie, puis qu'elle est bijective, et donner sa réciproque :

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to E \\ x \mapsto \ln(1+\sqrt{x}). \end{cases}$$

   On choisit $E = \mathbb{R}_+$.
   - • *Déjà, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, *on a* $\sqrt{x} \geqslant 0$, *donc* $1 + \sqrt{x} \geqslant 1 > 0$, *et le logarithme est bien défini.*
     • *Par ailleurs, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, *la croissance du logarithme entraîne* $\ln(1+\sqrt{x}) \geqslant \ln(1) = 0$, *donc le codomaine* $\mathbb{R}_+$ *est bien adapté à la formule.*

     L'application h *est donc bien définie.*
   - *Nous allons du même coup montrer que* h *est bijective et donner l'expression de sa réciproque.*
     Soit $y \in \mathbb{R}_+$.
     Nous allons déterminer les h*-antécédents de* y, *c'est-à-dire résoudre l'équation* $h(x) = y$, *d'inconnue* $x \in \mathbb{R}_+$. *Soit* $x \in \mathbb{R}_+$. *On a la chaîne d'équivalences*

$$\begin{aligned} h(x) = y &\Leftrightarrow \ln(1+\sqrt{x}) = y \\ &\Leftrightarrow 1 + \sqrt{x} = e^y && \textit{car } \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \textit{ est la réciproque de } \ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = e^y - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{e^y - 1}, && \textit{car } \sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \textit{ est la réciproque de } \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases} \textit{ et } e^y - 1 \geqslant 0 \end{aligned}$$

     et y *a donc un unique antécédent :* $\sqrt{e^y - 1}$.
     Cela montre que h *est bijective et que sa réciproque est* $h^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ y \mapsto \sqrt{e^y - 1}. \end{cases}$

Problème. Autour de la syndéticité.

1. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une injection et $A \subseteq \mathbb{N}$. Montrer $f^{-1}[f[A]] = A$.

   On procède par double inclusion.

   ▸ *Soit* $x \in f^{-1}[f[A]]$. *On a donc* $f(x) \in f[A]$.
   On peut donc trouver $a \in A$ *tel que* $f(x) = f(a)$.
   Par injectivité, on a $x = a$, *donc* $x \in A$.

   ▸ *Réciproquement, soit* $a \in A$.
   On a clairement $f(a) \in f[A]$, *ce qui montre que* $a \in f^{-1}[f[A]]$.

2. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Montrer que, pour tout ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$, on a $f[\mathbb{N} \setminus A] = \mathbb{N} \setminus f[A]$.

   Soit $A \subseteq \mathbb{N}$. *Montrons* $f[\mathbb{N} \setminus A] = \mathbb{N} \setminus f[A]$.
   On procède par double inclusion.

   - *Soit* $y \in f[\mathbb{N} \setminus A]$. *On peut trouver* $x \in \mathbb{N} \setminus A$ *tel que* $f(x) = y$.
   Montrons $y \in \mathbb{N} \setminus f[A]$, *c'est-à-dire que* $y \notin f[A]$.
   Procédons par l'absurde : supposons que $y \in f[A]$. *On peut alors trouver* $a \in A$ *tel que* $y = f(a)$.
   Par injectivité de f, *on a* $x = a$. *Or,* $x \notin A$ *et* $a \in A$, *donc on aboutit à une contradiction.*
   - *Réciproquement, soit* $y \in \mathbb{N} \setminus f[A]$. *Montrons* $y \in f[\mathbb{N} \setminus A]$.
   Puisque f *est surjective, on peut trouver* $x \in \mathbb{N}$ *tel que* $y = f(x)$.
   On a nécessairement $x \notin A$. *En effet, si* $x \in A$, *on a* $y \in f[A]$, *ce qui est exclu.*
   Ainsi, $x \in \mathbb{N} \setminus A$, *donc* $y = f(x) \in f[\mathbb{N} \setminus A]$.

Partie I. Ensembles syndétiques.

Soit $A \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble d'entiers naturels.

▸ Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. On dit que A est *ℓ-syndétique* si

$$\forall k \in \mathbb{N}, A \cap [\![k, k + \ell - 1]\!] \neq \varnothing.$$

▸ On dit que A est *syndétique* s'il est ℓ-syndétique pour un certain ℓ, c'est-à-dire si

$$\exists \ell \in \mathbb{N}^* : \forall k \in \mathbb{N}, A \cap [\![k, k + \ell - 1]\!] \neq \varnothing.$$

3. (a) Quelles sont les parties de $\mathbb{N}$ qui sont 1-syndétiques ?

   On va montrer que la seule partie de $\mathbb{N}$ *qui soit* 1*-syndétique est* $\mathbb{N}$ *lui-même.*

   Sens direct. *Soit* $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *une partie* 1*-syndétique. Montrons* $B = \mathbb{N}$ *par double inclusion.*

   ▸ *Puisque* $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, *on a déjà* $B \subseteq \mathbb{N}$.

   ▸ *Réciproquement, montrons* $\mathbb{N} \subseteq B$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$.
   Par 1*-syndéticité de* B, *on sait que* $B \cap [\![k, k + 1 - 1]\!] \neq \varnothing$.
   On peut donc trouver $b_0 \in B$ *tel que* $k \leqslant b_0 \leqslant k$, *ce qui montre* $b_0 = k$.
   On a donc $k \in B$, *ce qui conclut la démonstration de l'inclusion* $\mathbb{N} \subseteq B$.

   On a donc bien $B = \mathbb{N}$.

   Sens réciproque. *Réciproquement, montrons que* $\mathbb{N}$ *est un ensemble* 1*-syndétique.*

   ▸ *Il est déjà clair que* $\mathbb{N}$ *est une partie de* $\mathbb{N}$.

- *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *On a*

$$\mathbb{N} \cap [\![k, k+1-1]\!] = \mathbb{N} \cap \{k\} = \{k\} \neq \varnothing.$$

Cela montre que $\mathbb{N}$ *est* 1*-syndétique, et conclut.*

(b) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$.
Construire un exemple de partie $A \subseteq \mathbb{N}$ qui soit $(\ell+1)$-syndétique, mais pas ℓ-syndétique.

Soit $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant \ell\} = \{\ell, \ell+1, \ell+2, \ldots\}$.

- *Montrons que* A *est* $(\ell+1)$*-syndétique.*
  Soit $k \in \mathbb{N}$.
  Comme $k \geqslant 0$, *on a* $k + \ell = k + (\ell+1) - 1 \geqslant \ell$, *et donc* $k + \ell \in A$.
  Cela montre que $k+\ell \in A \cap [\![k, k+(\ell+1)-1]\!]$ *et donc que* $A \cap [\![k, k+(\ell+1)-1]\!] \neq \varnothing$.
  L'ensemble A *est donc* $(\ell+1)$*-syndétique.*
- *Montrons que* A *n'est pas* ℓ*-syndétique, c'est-à-dire* $\exists k \in \mathbb{N} : A \cap [\![k, k+\ell-1]\!] = \varnothing$.
  Candidat : $k = 0$.
  - *On a bien* $0 \in \mathbb{N}$.
  - *Tous les éléments de* $[\![0, 0+\ell-1]\!]$ *sont* $\leqslant \ell - 1$, *c'est-à-dire* $< \ell$, *et n'appartiennent donc pas à* A.
    Autrement dit, $A \cap [\![0, 0+\ell-1]\!] = \varnothing$, *ce qui conclut.*

4. (a) On note $P \subseteq \mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs.
Montrer que P est syndétique.

On va montrer que P *est* 2*-syndétique.*
Soit $k \in \mathbb{N}$.

L'intervalle entier $[\![k, k+2-1]\!]$ *est simplement la paire* $\{k, k+1\}$.
- *Si* k *est pair, on a donc* $k \in P \cap [\![k, k+2-1]\!]$.
- *Si* k *est impair, alors* $k+1$ *est pair et on a donc* $k+1 \in P \cap [\![k, k+2-1]\!]$, *ce qui montre que* $P \cap [\![k, k+2-1]\!] \neq \varnothing$.

Dans les deux cas, on a $P \cap [\![k, k+2-1]\!] \neq \varnothing$, *ce qui conclut.*

(b) On note $Q = \left\{ n^2 \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble des carrés parfaits.
Montrer que Q n'est pas syndétique.

On doit montrer que Q *n'est pas syndétique, c'est-à-dire que*

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N} : Q \cap [\![k, k+\ell-1]\!] = \varnothing.$$

Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. *Montrons* $\exists k \in \mathbb{N} : Q \cap [\![k, k+\ell-1]\!] = \varnothing$.
Candidat :[1] $k = \ell^2 + 1$.
- *On a bien* $\ell^2 + 1 \in \mathbb{N}$.
- *Montrons (par l'absurde) que* $Q \cap [\![\ell^2+1, \ell^2+1+\ell-1]\!] = \varnothing$.
  Supposons donc (par l'absurde) qu'il existe un élément $q_0 \in Q \cap [\![\ell^2+1, \ell^2+\ell]\!]$.

1. Le raisonnement est le suivant : il y a dans l'ensemble Q des « trous » de plus en plus grands, parce que l'écart entre deux carrés parfaits consécutifs (disons, entre le r-ième et le $(r+1)$-ième) est $(r+1)^2 - r^2 = 2r+1$. On va donc pouvoir trouver un « grand » intervalle entier disjoint de Q en commençant juste après un « grand » carré parfait. On pourrait chercher à optimiser, pour que cet intervalle entier soit précisément le « trou » entre deux carrés parfaits consécutifs, mais on peut aussi être un peu fainéant et se dire que, comme $2\ell + 1 > \ell$, caler l'intervalle juste après le ℓ-ième carré parfait a l'air de convenir.

- *Comme* $q_0 \in Q$*, on peut trouver* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $q_0 = n^2$.
- *On a l'encadrement* $\ell^2 + 1 \leqslant q_0 = n^2 \leqslant \ell^2 + \ell$.
  Comme on a $\ell^2 < \ell^2 + 1$ *et* $\ell^2 + \ell < \ell^2 + 2\ell + 1 = (\ell + 1)^2$*, on peut déduire de cet encadrement un encadrement strict*
  $$\ell^2 < n^2 < (\ell + 1)^2.$$
  Par stricte croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$ *(et comme tous les nombres en présence sont positifs), on en déduit*
  $$\ell < n < \ell + 1.$$
  On a donc trouvé un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui donne la contradiction souhaitée.

On a donc montré $Q \cap [\![\ell^2 + 1, \ell^2 + 1 + \ell - 1]\!] = \varnothing$*, ce qui conclut.*

5. Soit A et F deux parties de $\mathbb{N}$. On suppose A syndétique et F finie.
   Montrer que $A \setminus F$ est encore syndétique.

Puisque A *est syndétique, on peut trouver* $\ell \in \mathbb{N}^*$ *tel que* A *soit* ℓ*-syndétique.*
Comme F *est fini, on peut trouver* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $F \subseteq [\![0, n]\!]$*. En effet,*

- *si* F *est vide,* $n = 0$ *convient ;*
- *si* F *n'est pas vide, il admet un maximum et* $n = \max F$ *convient.*

Montrons qu'alors B *est* $(\ell + n + 1)$*-syndétique.*
Soit $k \in \mathbb{N}$.

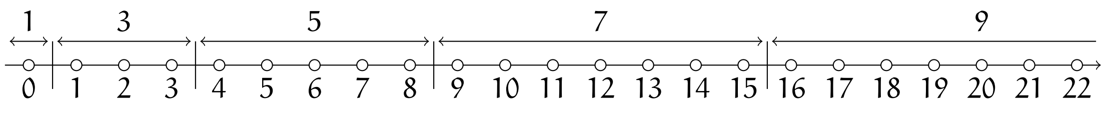
Par ℓ*-syndéticité de* A *(appliquée à l'entier* $k + n + 1$*), on a* $A \cap [\![k + n + 1, k + n + \ell]\!] \neq \varnothing$.
On peut donc trouver $a_0 \in A \cap [\![k + n + 1, k + n + \ell]\!]$.
Montrons que $a_0 \in (A \setminus F) \cap [\![k, k + n + \ell]\!]$.

- *On a déjà* $a_0 \in A$*, par construction.*
- *On a* $a_0 \geqslant k + n + 1 \geqslant n + 1$*, donc* $a_0 > n$*, donc* $a_0 \in F$.
- *On a* $a_0 \in [\![k + n + 1, k + n + \ell]\!]$*, donc* $a_0 \in [\![k, k + n + \ell]\!]$.

On a donc bien $a_0 \in (A \setminus F) \cap [\![k, k + n + \ell]\!]$*, et donc* $(A \setminus F) \cap [\![k, k + n + \ell]\!] \neq \varnothing$*, ce qui conclut.*

6. Donner un exemple d'ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ tel que ni A, ni $\mathbb{N} \setminus A$ ne soit syndétique.

L'idée est de découper l'ensemble des entiers en intervalles de plus en plus longs.



On va alors rassembler un intervalle sur deux dans un ensemble A*, si bien que son complémentaire* $\mathbb{N} \setminus A$ *rassemblera les autres. On verra alors que ni* A*, ni* $\mathbb{N} \setminus A$ *n'est syndétique.*
Notons ainsi $A = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} [\![(2p)^2, (2p + 1)^2 - 1]\!] = \{\underline{\underline{0}}, \underline{\underline{4, 5, 6, 7, 8}}, \underline{\underline{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24}}, \ldots\}$.

●○○○●●●●●○○○○○○○●●●●●●●●●○○○○○○○○○○○●●●●●●●●●●●●●○○○○○○○○○○○○○○○●●●●●●●●●●●●●●●●●···

Montrons maintenant que ni A*, ni* $\mathbb{N} \setminus A$ *n'est syndétique.*

► *Montrons que* A *n'est pas syndétique, c'est-à-dire* $\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N} : A \cap [\![k, k+\ell-1]\!] = \varnothing$.
Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. *Montrons* $\exists k \in \mathbb{N} : A \cap [\![k, k+\ell-1]\!] = \varnothing$.
Candidat : $k = (2\ell+1)^2$.

- *On a bien* $k \in \mathbb{N}$. ,
- *Montrons* $A \cap [\![k, k+\ell-1]\!] = \varnothing$.
  Soit $p \in \mathbb{N}$.
  - ▷ *Si* $p \leqslant \ell$, *on a* $(2p+1)^2 - 1 < (2p+1)^2 \leqslant (2\ell+1)^2 = k$, *donc*
  $$[\![(2p)^2, (2p+1)^2 - 1]\!] \cap [\![k, k+\ell-1]\!] = \varnothing.$$
  - ▷ *Si* $p > \ell$, *on a* $p \geqslant \ell+1$, *donc* $2p \geqslant 2\ell+2$. *On en déduit*
  $$\begin{aligned}(2p)^2 &\geqslant \big((2\ell+1)+1\big)^2 \\ &\geqslant (2\ell+1)^2 + 4\ell + 3 \\ &> (2\ell+1)^2 + \ell - 1 = k + \ell - 1,\end{aligned}$$
  ce qui montre que $[\![(2p)^2, (2p+1)^2 - 1]\!] \cap [\![k, k+\ell-1]\!] = \varnothing$.

  On a donc montré $\forall p \in \mathbb{N}, [\![(2p)^2, (2p+1)^2 - 1]\!] \cap [\![k, k+\ell-1]\!] = \varnothing$. *On en déduit que*
  $$\begin{aligned}A \cap [\![k, k+\ell-1]\!] &= \left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} [\![(2p)^2, (2p+1)^2 - 1]\!]\right) \cap [\![k, k+\ell-1]\!] \\ &= \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \Big([\![(2p)^2, (2p+1)^2 - 1]\!] \cap [\![k, k+\ell-1]\!]\Big) \\ &= \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \varnothing = \varnothing,\end{aligned}$$
  ce qui conclut.

► *Montrons que* $\mathbb{N} \setminus A$ *n'est pas syndétique, c'est-à-dire* $\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N} : (\mathbb{N} \setminus A) \cap [\![k, k+\ell-1]\!] = \varnothing$.
Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. *Montrons* $\exists k \in \mathbb{N} : (\mathbb{N} \setminus A) \cap [\![k, k+\ell-1]\!] = \varnothing$.
Candidat : $k = (2\ell)^2$.

- *On a bien* $k \in \mathbb{N}$.
- *Montrons* $(\mathbb{N} \setminus A) \cap [\![k, k+\ell-1]\!] = \varnothing$.
  Étant donné deux parties X, Y *de* $\mathbb{N}$, *on a la chaîne d'équivalences*
  $$\begin{aligned}(\mathbb{N} \setminus X) \cap Y = \varnothing &\Leftrightarrow \forall y \in Y, y \notin (\mathbb{N} \setminus X) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in Y, y \in X \\ &\Leftrightarrow Y \subseteq X.\end{aligned}$$
  Nous allons donc montrer $[\![k, k+\ell-1]\!] \subseteq A$.
  On a $k+\ell-1 = 4\ell^2+\ell-1 < 4\ell^2+4\ell = (2\ell+1)^2-1$, *donc* $[\![k, k+\ell-1]\!] \subseteq [\![(2\ell)^2, (2\ell+1)^2-1]\!]$.
  On en déduit $[\![k, k+\ell-1]\!] \subseteq \bigcup_{p\in\mathbb{N}} [\![(2p)^2, (2p+1)^2 - 1]\!] = A$, *ce qui conclut.*

Partie II. Syndéticité et épaisseur.

Soit $A \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble d'entiers naturels.
On dit que A est *épais* si

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N} : [\![k, k+\ell-1]\!] \subseteq A.$$

7. Donner un exemple d'ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ tel que ni A, ni $\mathbb{N} \setminus A$ ne soit épais.

   On note $A = \{2p \mid p \in \mathbb{N}\}$ *l'ensemble des entiers pairs. Montrons que ni* A, *ni* $\mathbb{N} \setminus A$ *n'est épais.*

   - *Montrons que* A *n'est pas épais, c'est-à-dire que* $\exists \ell \in \mathbb{N}^* : \forall k \in \mathbb{N}, [\![k, k+\ell-1]\!] \not\subseteq A$.
     Candidat : $\ell = 2$.
     - *On a bien* $\ell \in \mathbb{N}^*$.
     - *Soit* $k \in \mathbb{N}$.
       L'intervalle $[\![k, k+\ell-1]\!] = \{k, k+1\}$ *possède deux éléments, qui sont deux entiers consécutifs. Exactement l'un des deux est impair, donc* $[\![k, k+\ell-1]\!] \not\subseteq A$.
   - *On montre exactement de la même façon que l'ensemble* $\mathbb{N} \setminus A$ *des entiers impairs n'est pas épais.*

8. Soit $A \subseteq \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) A est syndétique ;
   (ii) pour tout ensemble épais T, $A \cap T \neq \varnothing$;
   (iii) le complémentaire $\mathbb{N} \setminus A$ n'est pas épais.

   - *On a vu dans la réponse à la question 6 qu'étant donné deux parties* X *et* Y *de* $\mathbb{N}$, *l'assertion* $Y \subseteq X$ *équivalait à* $(\mathbb{N} \setminus X) \cap Y = \varnothing$.
     Par passage à la négation, $Y \not\subseteq X$ *équivaut à* $(\mathbb{N} \setminus X) \cap Y \neq \varnothing$.
     On a alors la chaîne d'équivalences

     $$\begin{aligned} \mathbb{N} \setminus A \textit{ non épais} &\Leftrightarrow \textit{non}\Big(\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N} : [\![k, k+\ell-1]\!] \subseteq \mathbb{N} \setminus A\Big) \\ &\Leftrightarrow \exists \ell \in \mathbb{N}^* : \forall k \in \mathbb{N}, [\![k, k+\ell-1]\!] \not\subseteq \mathbb{N} \setminus A \\ &\Leftrightarrow \exists \ell \in \mathbb{N}^* : \forall k \in \mathbb{N}, A \cap [\![k, k+\ell-1]\!] \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow A \textit{ syndétique}, \end{aligned}$$

     ce qui montre l'équivalence entre (i) et (iii).
   - *On conclura en montrant l'équivalence entre (ii) et (iii).*
     - *Supposons (ii) et montrons (iii).*
       On a clairement $A \cap (\mathbb{N} \setminus A) = \varnothing$.
       D'après (ii), on en déduit que $\mathbb{N} \setminus A$ *ne peut pas être épais, ce qui conclut.*
     - *On procède par contraposée : supposons la négation de (ii).*
       On peut donc trouver $T \subseteq \mathbb{N}$ *épais tel que* $A \cap T = \varnothing$. *On a alors l'inclusion* $T \subseteq \mathbb{N} \setminus A$.
       Montrons que $\mathbb{N} \setminus A$ *est épais. Soit* $\ell \in \mathbb{N}^*$.
       Par épaisseur de T, *on peut trouver* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $T \cap [\![k, k+\ell-1]\!]$ *soit non vide.*
       D'après l'inclusion $T \subseteq \mathbb{N} \setminus A$, *on a* a fortiori $(\mathbb{N} \setminus A) \cap [\![k, k+\ell-1]\!] \neq \varnothing$, *ce qui conclut.*

   (b) Énoncer sans démonstration deux assertions analogues équivalentes à « A épais ».

   Mutatis mutandis, *la même démonstration qu'à la question précédente montre que les trois assertions suivantes sont équivalentes :*
   (i) A *est épais ;*
   (ii) pour tout ensemble syndétique S, $A \cap S \neq \varnothing$ *;*
   (iii) le complémentaire $\mathbb{N} \setminus A$ *n'est pas syndétique.*

Partie III. Syndéticité par morceaux et lemme de Brown (1968).

- Étant donné $d, r \in \mathbb{N}^*$, on appelle d-*chaîne de longueur* r la donnée de r entiers $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ tels que $\forall i \in [\![1, r-1]\!], a_i - a_{i-1} \in [\![1, d]\!]$.
- Un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ d'entiers naturels est dit *syndétique par morceaux* s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que A contienne des d-chaînes de toute longueur $r \in \mathbb{N}^*$.
- Étant donné deux ensembles $A, B \subseteq \mathbb{N}$, on note $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

9. Soit $A \subseteq \mathbb{N}$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.
   (i) A est syndétique par morceaux ;
   (ii) il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $A + [\![0, d-1]\!]$ soit épais ;
   (iii) il existe $S \subseteq \mathbb{N}$ syndétique et $T \subseteq \mathbb{N}$ épais tels que $A = S \cap T$.

   On procède par double implication.

   - *Supposons* A *syndétique par morceaux.*
     On peut donc trouver $d \in \mathbb{N}^*$ *tel que* A *contienne des* d*-chaînes de toute longueur.*
     Montrons que l'ensemble $A + [\![0, d-1]\!]$*, que l'on note* T *pour simplifier, est épais.*
     Soit $\ell \in \mathbb{N}$*. On peut donc trouver une* d*-chaîne* $a_0, \ldots, a_{\ell-1}$ *contenue dans* A*.*
     On souhaite montrer $\exists k \in \mathbb{N} : [\![k, k+\ell-1]\!] \subseteq T$*.*
     Candidat : $k = a_0$.
     Nous allons montrer l'inclusion $[\![a_0, a_{\ell-1}]\!] \subseteq T$*, puis vérifier que cette inclusion suffit à démontrer* $[\![a_0, a_0+\ell-1]\!] \subseteq T$*, ce qui conclura.*

     - *Soit* $j \in [\![0, \ell-2]\!]$*.*
       Pour tout $s \in [\![0, d-1]\!]$*, on a* $a_j + s \in T$*, car* $a_j \in A$*. Cela montre* $[\![a_j, a_j + d - 1]\!] \subseteq T$*.*
       Par hypothèse, $a_{j+1} - a_j \leqslant d$*, donc* $a_{j+1} - 1 \leqslant a_j + d - 1$*, d'où* $[\![a_j, a_{j+1} - 1]\!] \subseteq T$*.*
       On en déduit l'inclusion $[\![a_0, a_{\ell-1} - 1]\!] = \displaystyle\bigcup_{j=0}^{\ell-2} [\![a_j, a_{j+1} - 1]\!] \subseteq T$*.*
       Comme en outre $a_{\ell-1} \in A \subseteq T$*, on a bien* $[\![a_0, a_{\ell-1}]\!] \subseteq T$*.*
     - *Pour tout* $j \in [\![1, \ell-1]\!]$*, on a* $a_j - a_{j-1} \geqslant 1$*.*
       En additionnant ces inégalités, on obtient $a_{\ell-1} - a_0 \geqslant \ell - 1$*, donc* $a_{\ell-1} \geqslant a_0 + \ell - 1$*. On en déduit la chaîne d'inclusions* $[\![a_0, a_0+\ell-1]\!] \subseteq [\![a_0, a_{\ell-1}]\!] \subseteq T$*, ce qui conclut.*

   - *Supposons pouvoir trouver* $d \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $A + [\![0, d-1]\!]$ *soit épais. Notons* T *cet ensemble (et remarquons que* $A \subseteq T$*).*
     Notons $S = A \cup (\mathbb{N} \setminus T)$*. On a*

     $$\begin{aligned} S \cap T &= (A \cap T) \cup \big((\mathbb{N} \setminus T) \cap T\big) \\ &= A \cup \varnothing = A. \end{aligned}$$

     Pour conclure, il reste à montrer que S *est syndétique. Précisément, montrons que* S *est* d*-syndétique.*
     Soit $k \in \mathbb{N}$*. Montrons que* $S \cap [\![k, k+d-1]\!] \neq \varnothing$*. On distingue deux cas.*

     - *Si* $(\mathbb{N} \setminus T) \cap [\![k, k+d-1]\!] \neq \varnothing$*, on a* a fortiori $S \cap [\![k, k+d-1]\!] \neq \varnothing$ *et on a fini.*
     - *Supposons au contraire que* $(\mathbb{N} \setminus T) \cap [\![k, k+d-1]\!] = \varnothing$*, c'est-à-dire* $[\![k, k+d-1]\!] \subseteq T$*.*
       En particulier, $k + d - 1 \in T = A + [\![0, d-1]\!]$*. On peut donc trouver* $a \in A$ *et* $s \in [\![0, d-1]\!]$ *tels que* $k + d - 1 = a + s$*.*
       On a alors $d - 1 - s \in [\![0, d-1]\!]$*, donc* $a = k + d - 1 - s \in [\![k, k+d-1]\!]$*. Cela montre que* $A \cap [\![k, k+d-1]\!] \neq \varnothing$*, et donc* a fortiori $S \cap [\![k, k+d-1]\!] \neq \varnothing$*.*

- *Supposons pouvoir trouver* $S \subseteq \mathbb{N}$ *syndétique et* $T \subseteq \mathbb{N}$ *épais tels que* $A = S \cap T$. *On peut donc trouver* $\ell \in \mathbb{N}$ *tel que* S *soit* ℓ*-syndétique.*
  Nous allons montrer que A *est alors syndétique par morceaux. Plus précisément, on va montrer qu'il contient des* $(2\ell - 1)$*-chaînes*[2] *de toute longueur.*
  Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
  Par épaisseur de T, *on peut trouver* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $[\![k, k + r\ell - 1]\!] \subseteq T$.
  Soit $j \in [\![0, r - 1]\!]$. *Comme* S *est* ℓ*-syndétique, l'intersection* $S \cap [\![k + j\ell, k + (j + 1)\ell - 1]\!]$ *est non vide, donc on peut trouver* $a_j \in S \cap [\![k + j\ell, k + (j + 1)\ell - 1]\!]$.
  Puisque $a_j \in [\![k + j\ell, k + (j + 1)\ell - 1]\!] \subseteq [\![k, k + r\ell - 1]\!] \subseteq T$, *on a bien* $a_j \in S \cap T = A$.
  Il reste à montrer que $a_0, \dots, a_{r-1}$ *est une* $(2\ell - 1)$*-chaîne (de longueur* r*).*
  Soit $j \in [\![1, r]\!]$. *On a*

$$\begin{aligned} &\begin{cases} k + j\ell \leqslant a_j \leqslant k + (j + 1)\ell - 1 \\ k + (j - 1)\ell \leqslant a_{j-1} \leqslant k + j\ell - 1 \end{cases} \\ \text{donc} \quad & \big(k + j\ell\big) - \big(k + j\ell - 1\big) \leqslant a_j - a_{j-1} \leqslant \big(k + (j + 1)\ell - 1\big) - \big(k + (j - 1)\ell\big) \\ \text{donc} \quad & 1 \leqslant a_j - a_{j-1} \leqslant 2\ell - 1, \end{aligned}$$

  ce qui conclut.

10. Soit $A \subseteq \mathbb{N}$ syndétique par morceaux et $B, C \subseteq \mathbb{N}$ disjoints tels que $A = B \cup C$.
    (a) Grâce à la question 9, on écrit $A = S \cap T$, où $S \subseteq \mathbb{N}$ est syndétique et $T \subseteq \mathbb{N}$ est épais.
    On note $\widetilde{S} = B \cup (S \setminus A)$ et $\widetilde{T} = \mathbb{N} \setminus \widetilde{S}$.
    Montrer que $\widetilde{S} \cap T = B$ et $S \cap \widetilde{T} = C$.

    - *On a*

$$\begin{aligned} \widetilde{S} \cap T &= \big(B \cup (S \setminus A)\big) \cap T \\ &= (B \cap T) \cup \big((S \setminus A) \cap T\big) \\ &= B \cup \varnothing = B, \end{aligned}$$

      car $B \subseteq A \subseteq T$ *et car un hypothétique élément* $x \in (S \setminus A) \cap T$ *doit appartenir à* S *et à* T, *mais pas à* $A = S \cap T$, *ce qui est impossible.*
    - *On montre l'égalité* $S \cap \widetilde{T} = C$ *par double inclusion.*
      - *Soit* $x \in S \cap \widetilde{T}$. *On doit donc avoir* $x \in S$ *et* $x \in \widetilde{T}$, *c'est-à-dire* $x \notin \widetilde{S}$, *ce qui signifie* $x \notin B$ *et* $x \notin S \setminus A$.
        Comme $x \in S$ *et* $x \notin S \setminus A$, *on a* $x \in A = B \cup C$. *Comme* $x \notin B$, *on a* $x \in C$.
      - *Réciproquement, soit* $x \in C$.
        - *Comme* $x \in C$ *et que* B *et* C *sont disjoints,* $x \notin B$.
          Comme $x \in C$ *et* $A = B \cup C$, *on a* $x \in A$, *et donc* $x \notin S \setminus A$.
          On a donc $x \notin B \cup (S \setminus A)$, *donc* $x \notin \widetilde{S}$, *donc* $x \in \widetilde{T}$.
        - *Comme* $C \subseteq A \subseteq S$, *on a* $x \in S$

        On en déduit que $x \in S \cap \widetilde{T}$, *ce qui conclut.*

    (b) Déduire de ce qui précède que B ou C est syndétique par morceaux.

    On distingue deux cas.
    - *Si* $\widetilde{S}$ *est syndétique, l'intersection* $B = \widetilde{S} \cap T$ *est syndétique par morceaux d'après la question 9.*

2. Un raisonnement un peu plus précis montrerait en fait que A contient des ℓ-chaînes de toute longueur, mais on en n'a pas besoin.

- *Si $\widetilde{S}$ n'est pas syndétique, son complémentaire $\widetilde{T} = \mathbb{N} \setminus \widetilde{S}$ est épais d'après la question 8a. L'intersection $C = S \cap \widetilde{T}$ est alors syndétique par morceaux d'après la question 9.*

11. **Lemme de Brown.** Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tous $A_1, \ldots, A_r \subseteq \mathbb{N}$ tels que l'on ait l'égalité $\mathbb{N} = A_1 \cup \cdots \cup A_r$, il existe $i \in [\![1, r]\!]$ tel que A_i soit syndétique par morceaux.

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on note $P(r)$ l'assertion « pour tous $A_1, \ldots, A_r \subseteq \mathbb{N}$ tels que l'on ait $\mathbb{N} = A_1 \cup \cdots \cup A_r$, il existe $i \in [\![1, r]\!]$ tel que A_i soit syndétique par morceaux. »
Montrons $\forall r \in \mathbb{N}^*, P(r)$ par récurrence.

Initialisation. *Il est immédiat que $\mathbb{N}$ est épais, et on a vu qu'il était (1-)syndétique. D'après la question 9, $\mathbb{N}$ est syndétique par morceaux. Cela montre $P(1)$.*

Hérédité. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(r)$. Montrons $P(r+1)$.*
Soit $A_1, \ldots, A_r, A_{r+1} \subseteq \mathbb{N}$ tels que l'on ait $A_1 \cup \cdots \cup A_r \cup A_{r+1}$. Notons

$$A'_1 = A_1, \quad A'_2 = A_2, \quad \ldots, \quad A'_{r-1} = A_{r-1} \quad \textit{et} \quad A'_r = A_r \cup A_{r+1},$$

de telle sorte que $\mathbb{N} = A'_1 \cup \cdots \cup A'_r$.
D'après $P(r)$, on peut trouver $i \in [\![1, r]\!]$ tel que A'_i soit syndétique par morceaux. On distingue alors deux cas.

- *Si $i < r$, on a directement $A_i = A'_i$ syndétique par morceaux.*
- *Si $i = r$, on a $A'_r = A_r \cup A_{r+1}$ syndétique par morceaux.*
  Notons alors $B = A_{r+1} \setminus A_r$, de telle sorte que $A'_r = A_r \cup B$ et $A_r \cap B = \varnothing$.
  D'après 10b, on en déduit que A_r ou B est syndétique par morceaux. On distingue encore deux cas !
  - *Si A_r est syndétique par morceaux, on a terminé.*
  - *Si B est syndétique par morceaux, comme $B \subseteq A_{r+1}$, on vérifie directement que A_{r+1} est syndétique par morceaux (si on peut trouver d tel que B contienne des d-chaînes de toute longueur, il est clair que A_{r+1} contient également des d-chaînes de toute longueur).*

Quel que soit le cas, on a donc trouvé $i \in [\![1, r+1]\!]$ tel que A_i soit syndétique par morceaux, ce qui montre $P(r+1)$, et clôt la récurrence.

Partie IV. Bijections préservant l'épaisseur.

> On note $W(\mathbb{N})$ l'ensemble des bijections $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que
>
> $$\exists d \in \mathbb{N}^* : \forall i \in \mathbb{N}, |f(i) - i| \leqslant d.$$

12. Soit f une bijection. Montrer que $f \in W(\mathbb{N})$ si et seulement si $f^{-1} \in W(\mathbb{N})$.

Sens direct. *Supposons $f \in W(\mathbb{N})$. On peut donc trouver $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall i \in \mathbb{N}, |f(i) - i| \leqslant d$.*
Nous allons montrer $\forall j \in \mathbb{N}, \left|f^{-1}(j) - j\right| \leqslant d$, ce qui montrera $f^{-1} \in W(\mathbb{N})$.
Soit $j \in \mathbb{N}$. Posons $i = f^{-1}(j)$, si bien que $j = f(i)$. On a alors

$$\left|f^{-1}(j) - j\right| = |i - f(i)| = |f(i) - i| \leqslant d,$$

ce qui conclut.

Sens réciproque. *Le sens direct ayant été traité pour un élément de $W(\mathbb{N})$ quelconque, on a en fait montré $\forall g \in W(\mathbb{N}), g^{-1} \in W(\mathbb{N})$.*
Supposons maintenant $f^{-1} \in W(\mathbb{N})$. En appliquant ce qui précède à $g = f^{-1}$, on obtient que $f = (f^{-1})^{-1} \in W(\mathbb{N})$, ce qui conclut.

13. Montrer que $\forall f_1, f_2 \in W(\mathbb{N}), f_2 \circ f_1 \in W(\mathbb{N})$.

Soit $f_1, f_2 \in W(\mathbb{N})$. *On peut donc trouver* $d_1, d_2 \in \mathbb{N}^*$ *tels que*

$$\forall i \in \mathbb{N}, |f_1(i) - i| \leqslant d_1 \qquad (\dagger)$$
$$\forall j \in \mathbb{N}, |f_2(j) - j| \leqslant d_2. \qquad (\ddagger)$$

Nous allons montrer $\forall i \in \mathbb{N}, |(f_2 \circ f_1)(i) - i| \leqslant d_1 + d_2$, *ce qui montrera* $f_2 \circ f_1 \in W(\mathbb{N})$.
Soit $i \in \mathbb{N}$.

- *En appliquant (†) à* i, *on obtient* $|f_1(i) - i| \leqslant d_1$, *c'est-à-dire* $i - d_1 \leqslant f_1(i) \leqslant i + d_1$.
- *En appliquant (‡) à* $j = f_1(i)$, *on obtient* $|f_2(f_1(i)) - f_1(i)| \leqslant d_2$, *c'est-à-dire*

$$f_1(i) - d_2 \leqslant (f_2 \circ f_1)(i) \leqslant f_1(i) + d_2.$$

En cumulant les deux encadrements, on obtient

$$i - d_1 - d_2 \leqslant (f_2 \circ f_1)(i) \leqslant i + d_1 + d_2 \qquad \textit{c'est-à-dire} \qquad |(f_2 \circ f_1)(i) - i| \leqslant d_1 + d_2,$$

ce qui conclut.

14. Soit $f \in W(\mathbb{N})$ et $A \subseteq \mathbb{N}$.

(a) Montrer que A est épais si et seulement si $f[A]$ est épais.

- *Commençons par montrer que, si* $f \in W(\mathbb{N})$ *et* $A \subseteq \mathbb{N}$, *alors* $f[A]$ *est épais.*
Comme $f \in W(\mathbb{N})$, *on peut trouver* $d \in \mathbb{N}^*$ *tel que l'on ait* $\forall i \in \mathbb{N}, |f(i) - i| \leqslant d$.
Soit ℓ *un entier.*
Par épaisseur de A, *on peut trouver un entier* k *tel que* $[\![k, k + \ell + 2d - 1]\!] \subseteq A$.
Nous allons montrer $[\![k + d, k + d + \ell - 1]\!] \subseteq f[A]$, *ce qui montrera que* $f[A]$ *est épais.*
Soit $y \in [\![k + d, k + d + \ell - 1]\!]$. *Par surjectivité de* f, *on peut trouver* $x \in \mathbb{N}$ *tel que* $y = f(x)$.
D'après la propriété de f, *on a* $|f(x) - x| \leqslant d$, *c'est-à-dire* $y - d \leqslant x \leqslant y + d$.
L'encadrement $k + d \leqslant y \leqslant k + d + \ell - 1$ *donne donc* $k \leqslant x \leqslant k + 2d + \ell - 1$, *donc* $x \in [\![k, k + 2d + \ell - 1]\!]$, *donc* $x \in A$. *Cela montre* $y \in f[A]$.
- *Le premier point montre donc que* ***quel que soit*** $f \in W(\mathbb{N})$, *si* A *est épais,* $f[A]$ *l'est également.*
Supposons réciproquement que $f[A]$ *soit épais.*
En appliquant ce qui précède à l'application f^{-1} *(qui appartient encore à* $W(\mathbb{N})$ *d'après la question 12), on obtient que* $f^{-1}[f[A]]$ *est épais.*
D'après la question 1, on en déduit que A *est épais, ce qui conclut la démonstration.*

(b) En déduire que A est syndétique si et seulement si $f[A]$ est syndétique.

On a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned}
f[A] \textit{ syndétique} &\Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus f[A] \textit{ non épais} && \textit{(question 8a)}\\
&\Leftrightarrow f[\mathbb{N} \setminus A] \textit{ non épais} && \textit{(question 2)}\\
&\Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus A \textit{ non épais} && \textit{(question 14a)}\\
&\Leftrightarrow A \textit{ syndétique}. && \textit{(question 8a)}
\end{aligned}$$

15. Construire une bijection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f \notin W(\mathbb{N})$ et $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), A$ épais $\Leftrightarrow f[A]$ épais.

Pour cette question difficile, on va se contenter de présenter un exemple, en esquissant les grandes lignes de la démonstration.
On note $P = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Lemme. *Quel que soit* $T \subseteq \mathbb{N}$ *épais, alors* $T \setminus P$ *est épais.*

Démonstration du lemme. *Soit* $\ell \in \mathbb{N}$. *On peut trouver* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $2^k > \ell$ *(donc* $2^k - 1 \geqslant \ell$*).*

- *Déjà, remarquons que l'ensemble* $T_+ = \left\{ t \in T \,\middle|\, t \geqslant 2^k \right\}$ *est encore épais (en suivant les mêmes idées que dans la question 5).*
  Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
  Par épaisseur de T, *on peut trouver un intervalle entier* I *de cardinal* $r + 2^k$ *inclus dans* T.
  On vérifie alors que $I_+ = \left\{ i \in I \,\middle|\, i \geqslant 2^k \right\}$ *est un intervalle entier de cardinal* $\geqslant r$, *inclus dans* T_+, *ce qui clôt la preuve de l'épaisseur de* T_+.
- *Par épaisseur de* T_+, *on peut trouver un intervalle entier* J *de cardinal* $2\ell + 1$ *dans* T_+.
  On distingue alors trois cas.
  - *Si* J *et* P *sont disjoints, on a trouvé un intervalle entier* J *de cardinal* $2\ell + 1$ *dans* $T_+ \setminus P \subseteq T \setminus P$.
  - *Si l'intersection* $J \cap P$ *est un singleton* $\{n_0\}$, *les deux « morceaux »* $J_- = \{j \in J \,|\, j < n_0\}$ *et* $J_+ = \{j \in J \,|\, j > n_0\}$ *sont deux intervalles entiers (l'un des deux peut être vide) tels que l'on ait* $J_\pm \subseteq T_+ \setminus P \subseteq T \setminus P$ *et* $|J_-| + |J_+| = 2\ell$.
    Au moins l'un des morceaux $J_\pm$ *est alors un intervalle entier de cardinal* $\geqslant \ell$, *inclus dans* $T \setminus P$.
  - *Si l'intersection* $J \cap P$ *contient au moins deux éléments, on peut trouver deux puissances de 2 consécutives* $2^s < 2^{s+1} \in J \cap P \subseteq T_+$. *En particulier, on a* $k \leqslant s$.
    L'intervalle entier $[\![2^s + 1, 2^{s+1} - 1]\!]$ *est alors inclus dans* $J \setminus P$, *donc dans* $T_+ \setminus P \subseteq T \setminus P$. *Son cardinal est*

$$\left| [\![2^s + 1, 2^{s+1} - 1]\!] \right| = 2^{s+1} - 2^s - 1 = 2^s - 1 \geqslant 2^k - 1 \geqslant \ell.$$

  Dans tous les cas, on a trouvé un intervalle entier de cardinal $\geqslant \ell$ *dans* $T \setminus P$.

Maintenant que le lemme est démontré, construisons un exemple. On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ i \mapsto & \begin{cases} 2^{2n+1} & \text{si } i = 2^{2n} \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} \\ 2^{2n} & \text{si } i = 2^{2n+1} \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} \\ i & \text{si } i \notin P. \end{cases} \end{cases}$$

On vérifie facilement que f *est bien définie et qu'il s'agit d'une involution. En particulier,* f *est bijective.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| f(2^{2n}) - 2^{2n} \right| = \left| 2^{2n+1} - 2^{2n} \right| = 2^{2n}$, *donc* $f \notin W(\mathbb{N})$.

Soit maintenant $A \subseteq \mathbb{N}$ *épais. Vu que* $\forall i \in A \setminus P, f(i) = i$, *on a* $A \setminus P \subseteq f[A]$. *D'après le lemme,* $A \setminus P$ *est épais, d'où l'on tire que* A *est lui-même épais.*

Cela montre l'implication $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), A$ *épais* $\Rightarrow f[A]$ *épais, mais le caractère involutif de* f *(et la question 1) donne immédiatement l'implication réciproque.*