Première composition de mathématiques

Durée : *3 heures (aucune sortie ne sera autorisée pendant les dix dernières minutes).*

Sauf mention explicite du contraire, tout doit toujours être parfaitement justifié.

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci d'encadrer ou de souligner vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre.*

Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.

Bon courage pour votre premier devoir !

Exercice 1

Soit $a \in]0,1[$. Montrer

$$\forall n \geqslant 2, (1-a)^n < \frac{1}{1+na}.$$

Exercice 2

Soit $V_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y+z=0\right\}$ et $V_2 = \{(t, 2t, 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que tout élément de $\mathbb{R}^3$ s'écrit, de manière unique, comme somme d'un élément de V_1 et d'un élément de V_2.

Exercice 3

Les deux questions sont indépendantes.

1. **Question de cours.** Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Compléter et démontrer les propositions suivantes :
   - si $g \circ f$ est injective, alors [...] ;
   - si $g \circ f$ est surjective, alors [...].
2. Choisir (intelligemment, mais sans justification) un codomaine E pour l'application h ci-dessus, puis montrer que h est bien définie, puis qu'elle est bijective, et donner sa réciproque :

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to & E \\ x \mapsto & \ln(1+\sqrt{x}). \end{cases}$$

Problème. Autour de la syndéticité.

Les deux dernières parties du problème sont indépendantes l'une de l'autre.

1. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une injection et $A \subseteq \mathbb{N}$. Montrer $f^{-1}[f[A]] = A$.
2. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Montrer que, pour tout ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$, on a $f[\mathbb{N} \setminus A] = \mathbb{N} \setminus f[A]$.

Partie I. Ensembles syndétiques.

Soit $A \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble d'entiers naturels.

- Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. On dit que A est ℓ-*syndétique* si

$$\forall k \in \mathbb{N}, A \cap [\![k, k+\ell-1]\!] \neq \varnothing.$$

- On dit que A est *syndétique* s'il est ℓ-syndétique pour un certain ℓ, c'est-à-dire si

$$\exists \ell \in \mathbb{N}^* : \forall k \in \mathbb{N}, A \cap [\![k, k+\ell-1]\!] \neq \varnothing.$$

3. (a) Quelles sont les parties de $\mathbb{N}$ qui sont 1-syndétiques ?
   (b) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$.
   Construire un exemple de partie $A \subseteq \mathbb{N}$ qui soit $(\ell+1)$-syndétique, mais pas ℓ-syndétique.
4. (a) On note $P \subseteq \mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs.
   Montrer que P est syndétique.
   (b) On note $Q = \left\{ n^2 \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble des carrés parfaits.
   Montrer que Q n'est pas syndétique.
5. Soit A et F deux parties de $\mathbb{N}$. On suppose A syndétique et F finie.
   Montrer que $A \setminus F$ est encore syndétique.
6. Donner un exemple d'ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ tel que ni A, ni $\mathbb{N} \setminus A$ ne soit syndétique.

Partie II. Syndéticité et épaisseur.

Soit $A \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble d'entiers naturels.
On dit que A est *épais* si

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N} : [\![k, k+\ell-1]\!] \subseteq A.$$

7. Donner un exemple d'ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ tel que ni A, ni $\mathbb{N} \setminus A$ ne soit épais.
8. Soit $A \subseteq \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
      (i) A est syndétique ;
      (ii) pour tout ensemble épais T, $A \cap T \neq \varnothing$;
      (iii) le complémentaire $\mathbb{N} \setminus A$ n'est pas épais.
   (b) Énoncer sans démonstration deux assertions analogues équivalentes à « A épais ».

Partie III. Syndéticité par morceaux et lemme de Brown (1968).

- Étant donné $d, r \in \mathbb{N}^*$, on appelle d-*chaîne de longueur* r la donnée de r entiers $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ tels que $\forall i \in [\![1, r-1]\!], a_i - a_{i-1} \in [\![1, d]\!]$.
- Un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ d'entiers naturels est dit *syndétique par morceaux* s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que A contienne des d-chaînes de toute longueur $r \in \mathbb{N}^*$.
- Étant donné deux ensembles $A, B \subseteq \mathbb{N}$, on note $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

9. Soit $A \subseteq \mathbb{N}$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.
   (i) A est syndétique par morceaux ;
   (ii) il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $A + [\![0, d-1]\!]$ soit épais ;
   (iii) il existe $S \subseteq \mathbb{N}$ syndétique et $T \subseteq \mathbb{N}$ épais tels que $A = S \cap T$.
10. Soit $A \subseteq \mathbb{N}$ syndétique par morceaux et $B, C \subseteq \mathbb{N}$ disjoints tels que $A = B \cup C$.
   (a) Grâce à la question 9, on écrit $A = S \cap T$, où $S \subseteq \mathbb{N}$ est syndétique et $T \subseteq \mathbb{N}$ est épais.
   On note $\widetilde{S} = B \cup (S \setminus A)$ et $\widetilde{T} = \mathbb{N} \setminus \widetilde{S}$.
   Montrer que $\widetilde{S} \cap T = B$ et $S \cap \widetilde{T} = C$.
   (b) Déduire de ce qui précède que B ou C est syndétique par morceaux.
11. **Lemme de Brown.** Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tous $A_1, \dots, A_r \subseteq \mathbb{N}$ tels que l'on ait l'égalité $\mathbb{N} = A_1 \cup \cdots \cup A_r$, il existe $i \in [\![1, r]\!]$ tel que A_i soit syndétique par morceaux.

Partie IV. Bijections préservant l'épaisseur.

On note $W(\mathbb{N})$ l'ensemble des bijections $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que

$$\exists d \in \mathbb{N}^* : \forall i \in \mathbb{N}, |f(i) - i| \leqslant d.$$

12. Soit f une bijection. Montrer que $f \in W(\mathbb{N})$ si et seulement si $f^{-1} \in W(\mathbb{N})$.
13. Montrer que $\forall f_1, f_2 \in W(\mathbb{N}), f_2 \circ f_1 \in W(\mathbb{N})$.
14. Soit $f \in W(\mathbb{N})$ et $A \subseteq \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que A est épais si et seulement si $f[A]$ est épais.
   (b) En déduire que A est syndétique si et seulement si $f[A]$ est syndétique.
15. Construire une bijection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f \notin W(\mathbb{N})$ et $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), A \text{ épais} \Leftrightarrow f[A] \text{ épais}$.