Deuxième composition de mathématiques

Durée : *4 heures (aucune sortie ne sera autorisée pendant les dix dernières minutes).*

Sauf mention explicite du contraire, tout doit toujours être parfaitement justifié.

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci $\boxed{\text{d'encadrer}}$ ou de souligner vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre.*

Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.

Exercice 1

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z}{z-2} \end{cases}$.

Trouver $p \in \mathbb{C}$ tel que f induise une bijection $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \setminus \{p\}$, et exprimer la réciproque φ^{-1}.

Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Linéariser $\cos^3(x)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\cos^3(3^k x)}{3^k}$.

Problème. Sommes de Gauss.

Dans tout le problème, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$,

- on pose $\zeta_n = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{n}\right)$;
- on définit la fonction $e_n : \begin{cases} \mathbb{Z} \to & \mathbb{C} \\ x \mapsto \zeta_n^x = \exp\left(i\,2\pi\,\dfrac{x}{n}\right) \end{cases}$;
- on définit la n-*ième somme de Gauss* :

$$G_n = \sum_{x=0}^{n-1} e_n(x^2) = \sum_{x=0}^{n-1} \exp\left(i\,2\pi\,\frac{x^2}{n}\right).$$

Le but du problème est de déterminer la valeur de G_n pour certaines valeurs de n, et notamment quand n est premier.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

0. En utilisant les résultats du lycée, montrer que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geqslant \dfrac{2}{\pi}x$.
1. Rappeler sans démonstration le lien entre ζ_n et l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité.
2. Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. Que dire de $e_n(x_1 + x_2)$?
3. Montrer que e_n est n-périodique, c'est-à-dire $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, x_1 \equiv x_2 \pmod{n} \Rightarrow e_n(x_1) = e_n(x_2)$.

Partie I. Exemples.

4. Calculer G_2, G_3 et G_4.
5. (a) Montrer que $1 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = 0$.

   (b) En déduire une équation du second degré dont $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est solution, puis les valeurs de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

   (c) En déduire G_5.
6. En calculant $G_7 + \overline{G_7}$ et $G_7\,\overline{G_7}$, déterminer G_7.
7. La suite du sujet montrera $G_{11} = i\sqrt{11}$ et $G_{13} = \sqrt{13}$: on peut l'admettre dans les deux questions qui suivent.

   (a) Calculer $\cos\left(\dfrac{2\pi}{13}\right) + \cos\left(\dfrac{6\pi}{13}\right) + \cos\left(\dfrac{8\pi}{13}\right)$.

   (b)$^+$ Pour tout x tel que $\cos x \neq 0$, on note $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

   Exprimer $2i\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right)$ et $i\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right)$ comme des sommes alternées $\pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \cdots$ d'éléments de $\mathbb{U}_{11}$ et en déduire l'égalité $\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) = \sqrt{11}$.

Partie II. Calcul du module $|G_n|$.

8. Soit $k \in \mathbb{Z}$. En faisant attention aux cas particuliers, calculer $\displaystyle\sum_{x=0}^{n-1} e_n(kx)$.

9. (a) Montrer $|G_n|^2 = \displaystyle\sum_{x=0}^{n-1}\sum_{y=0}^{n-1} e_n(x^2 - y^2)$.

   (b) On fixe $y \in \mathbb{Z}$. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{d=\delta}^{\delta+n-1} e_n\big(2dy + d^2\big)\right)_{\delta\in\mathbb{Z}}$ est constante.

   (c) Déduire de ce qui précède la formule $|G_n|^2 = \displaystyle\sum_{y=0}^{n-1}\sum_{d=0}^{n-1} e_n\big(2dy + d^2\big)$.

   (d) Montrer que, si n est impair, $|G_n| = \sqrt{n}$.

   (e) Déterminer la valeur de $|G_n|$ quand n est pair, et déterminer $\left\{n \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, G_n = 0\right\}$.

Partie III. Calcul de G_n, au signe près.

Dans cette section, on suppose que n est un nombre premier impair.

- On pourra utiliser le changement d'indices dans les sommes sous la forme suivante : si X est un ensemble fini, que $(a_x)_{x\in X}$ est une famille de nombres complexes indexée par X, et que $\sigma : X \to X$ est une bijection, alors

$$\sum_{x\in X} a_x = \sum_{x\in X} a_{\sigma(x)}.$$

- On rappelle le théorème de Bézout : quels que soient a et $b \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux, on peut trouver $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $ua + vb = 1$.
- On définit une fonction $r : \mathbb{Z} \to [\![0, n-1]\!]$ envoyant tout entier $x \in \mathbb{Z}$ sur le reste dans sa division par n. On pourra utiliser sans démonstration les deux propriétés (évidentes) suivantes :
  - $\forall x \in \mathbb{Z}, r(x) \equiv x \pmod n$;
  - $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, r(x_1) = r(x_2) \Leftrightarrow x_1 \equiv x_2 \pmod n$.

10. Montrer que pour tout $x \in [\![1, n-1]\!]$, on peut trouver $x^\dagger \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $x\,x^\dagger \equiv 1 \pmod n$.

11. Soit $a \in [\![1, n-1]\!]$. Montrer que l'application $\sigma : \begin{cases} [\![0, n-1]\!] \to [\![0, n-1]\!] \\ \quad x \quad\;\; \mapsto \quad r(ax) \end{cases}$ est une bijection.

12. **Premier cas.** On suppose $\exists a \in \mathbb{Z} : a^2 \equiv -1 \pmod n$.
    Montrer que $G_n \in \mathbb{R}$ et en déduire $G_n = \pm\sqrt{n}$.

13. **Deuxième cas.** On suppose $\forall a \in \mathbb{Z}, a^2 \not\equiv -1 \pmod n$. Montrer que $G_n = \pm i\sqrt{n}$.

Partie IV. Détermination du signe.

On admet que la disjonction de cas de la partie précédente correspond au résidu de n modulo 4. Autrement dit, on admet que, pour un nombre premier impair n,

- si $n \equiv 1 \pmod 4$, alors $\exists a \in \mathbb{Z} : a^2 \equiv -1 \pmod n$, et donc $G_n = \pm\sqrt{n}$;
- si $n \equiv 3 \pmod 4$, alors $\forall a \in \mathbb{Z}, a^2 \not\equiv -1 \pmod n$, et donc $G_n = \pm i\sqrt{n}$.

Le but de cette dernière partie est de montrer que, dans tous les cas, le signe est $+$ (Gauss, 1805).

Les deux cas étant similaires, on suppose désormais n premier et $n \equiv 1 \pmod 4$. On fixe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 4m+1$.

14. On définit $T = \displaystyle\sum_{x=1}^{n-1} \exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right)$. En séparant les termes de rang pair et impair dans cette somme, montrer
$$T = (1+i)\sum_{y=1}^{2m} \exp\left(i\frac{2\pi}{n}y^2\right).$$

15. Montrer $G_n = 1 + \displaystyle\sum_{x=1}^{n-1}\left(\cos\frac{\pi x^2}{2n} + \sin\frac{\pi x^2}{2n}\right)$.

Dans la fin du sujet, on note s la partie entière de $\sqrt{n}$, de telle sorte que $s < \sqrt{n} < s+1$.

16. Montrer $1 + \displaystyle\sum_{x=1}^{s}\left(\cos\frac{\pi x^2}{2n} + \sin\frac{\pi x^2}{2n}\right) \geqslant \sqrt{n}$.

17. **Sommation d'Abel.** Soit $a < b$ deux entiers et $(u_x)_{x=a}^{b}$, $(v_x)_{x=a+1}^{b}$ deux familles de nombres complexes. Montrer
$$-u_a v_{a+1} + \sum_{x=a+1}^{b-1} u_x(v_x - v_{x+1}) + u_b v_b = \sum_{x=a+1}^{b}(u_x - u_{x-1})v_x.$$

18. En appliquant la sommation d'Abel aux familles
$$(u_x)_{x=s}^{n-1} = \left(\exp\left(i\frac{\pi}{2n}(x^2+x)\right)\right)_{x=s}^{n-1} \qquad \text{et} \qquad (v_x)_{x=s+1}^{n-1} = \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2n}\right)}\right)_{x=s+1}^{n-1},$$
montrer l'inégalité
$$\left|\sum_{x=s+1}^{n-1} \exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right)\right| \leqslant \frac{n}{s+1}.$$

19. Conclure la démonstration de l'égalité $G_n = \sqrt{n}$.