Troisième composition de mathématiques

Durée : *4 heures (aucune sortie ne sera autorisée pendant les dix dernières minutes).*

Sauf mention explicite du contraire, tout doit toujours être parfaitement justifié.

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci d'encadrer ou de souligner vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre.*

Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n.$$

Déterminer l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

On définit la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\mathrm{sh}(x)} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est deux fois dérivable et que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant x + 1$.
   On n'utilisera aucun résultat portant sur la convexité.
3. Sans faire de nouveau calcul de dérivée, montrer $\forall x \in]-\infty, 1[\,, f(x) \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

Problème. Matrices bistochastiques.

Dans tout le problème, $n \geqslant 3$ désigne un entier.

- On rappelle qu'étant donné $M \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ et $j \in [\![1, p]\!]$, la notation $C_j(M)$ désigne la j-ième colonne de M, vue comme vecteur de $\mathbb{C}^n$.
- Étant donné $M \in M_n(\mathbb{R})$, on notera $M \geqslant 0$ si $\forall i, j \in [\![1, n]\!], [M]_{i,j} \geqslant 0$.
- Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *bistochastique* si tous ses éléments sont $\geqslant 0$, et si la somme des éléments de chacune de ses lignes et de chacune de ses colonnes vaut 1. On note alors

$$\mathcal{B}_n = \left\{ M \in M_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; M \geqslant 0 \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{\ell,k} = 1 \right\}$$

  l'ensemble de ces matrices.
- On note Σ_n l'ensemble des bijections $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$.

Pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, on note P_σ et on appelle *matrice de permutation associée à* σ la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient (i,j) vaut 1 si $i = \sigma(j)$, et 0 sinon. Ainsi, $P_\sigma = \left(\mathbb{1}_{(i=\sigma(j))}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

- On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ les vecteurs de la base canonique.
- On note également $u = e_1 + \cdots + e_n$ le vecteur dont tous les coefficients valent 1.
- Étant donné un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, on note $\|X\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$.

Partie I. Généralités.

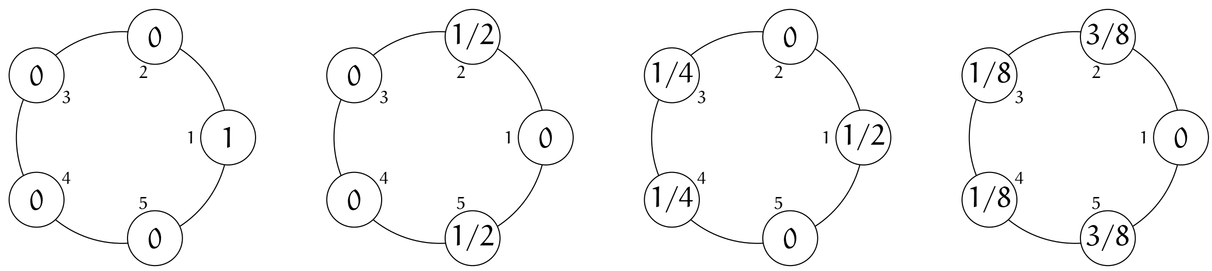
1. **Matrices de permutation.**
   (a) Soit $\sigma \in \Sigma_n$ et $j \in [\![1, n]\!]$. Montrer $P_\sigma e_j = e_{\sigma(j)}$.
   (b) Soit $\sigma, \tau \in \Sigma_n$. Montrer $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}$.
   (c) Soit $\sigma \in \Sigma_n$. Montrer que P_σ est inversible et que $P_\sigma^{-1} = P_\sigma^T$.
2. **Une première caractérisation des matrices bistochastiques.**
   (a) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{B}_n$ si et seulement si $M \geqslant 0$ et $Mu = M^T u = u$.
   (b) En déduire que $\mathcal{B}_n$ est stable par produit, c'est-à-dire que $\forall M, N \in \mathcal{B}_n, MN \in \mathcal{B}_n$.
3. Donner un exemple de matrice non inversible appartenant à $\mathcal{B}_n$.
4. **Matrices bistochastiques inversibles.** Soit $M \in \mathcal{B}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $M^{-1} \in \mathcal{B}_n$ si et seulement si $M^{-1} \geqslant 0$.
   (b) Supposons $M^{-1} \in \mathcal{B}_n$. On va montrer qu'alors M est une matrice de permutation.
      i. En utilisant l'égalité $M^{-1}M = I_n$, montrer
      $$\forall i, j \in [\![1, n]\!], [M]_{i,j} \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : C_i(M^{-1}) = \lambda e_j.$$
      ii. En déduire que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe un unique $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $[M]_{i,j} \neq 0$, et qu'on a alors $[M]_{i,j} = 1$.
      iii. La question précédente montre que l'on peut trouver une fonction $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telle que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], [M]_{i,j} = \mathbb{1}_{(i=\sigma(j))}$. Montrer $\sigma \in \Sigma_n$, c'est-à-dire que σ est bijective.

5. **Propriétés spectrales des matrices bistochastiques.** Soit $M \in \mathcal{B}_n$.
   (a) Montrer que $M - I_n$ n'est pas inversible.
   (b) Montrer $\forall X \in \mathbb{C}^n, \|MX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$.
   (c) En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ de module > 1, la matrice $M - \lambda I_n$ est inversible.

Partie II. Un processus de diffusion.

On modélise (grossièrement) la diffusion de la chaleur dans un matériau homogène de forme circulaire. Pour simplifier, on discrétise à la fois le matériau et le temps, si bien que l'état du système au temps $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ est simplement donné par n températures différentes $x_1(t), \dots, x_n(t)$.
À chaque étape, la température en un point est remplacée par la moyenne des températures de ses deux voisins à l'étape précédente. Voici par exemple le début du processus dans le cas $n = 5$.

$t = 0$ $\qquad$ $t = 1$ $\qquad$ $t = 2$ $\qquad$ $t = 3$



$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/8 \\ 1/8 \\ 1/8 \\ 3/8 \end{pmatrix}$$

Plus formellement, on définit une suite de vecteurs $(X_t)_{t\in\mathbb{N}} = \left(\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}\right)_{t\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ en posant

$$\forall i \in [\![1, n]\!], x_i(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![1, n]\!], x_i(t+1) = \begin{cases} \dfrac{x_{i-1}(t) + x_{i+1}(t)}{2} & \text{si } 2 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \dfrac{x_n(t) + x_2(t)}{2} & \text{si } i = 1 \\ \dfrac{x_{n-1}(t) + x_1(t)}{2} & \text{si } i = n. \end{cases} \qquad (\text{⌛})$$

6. **Diagonalisation d'une matrice de permutation.** On définit un élément $\sigma \in \Sigma_n$ par :

$$\sigma : \begin{cases} [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!] \\ i \mapsto \begin{cases} i - 1 & \text{si } i \geqslant 2 \\ n & \text{si } i = 1. \end{cases} \end{cases}$$

   (a) Montrer que $P_\sigma^n = I_n$.
   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur non nul tels que $P_\sigma X = \lambda X$. Montrer que $\lambda \in \mathbb{U}_n$.

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{U}_n$. Montrer que le vecteur $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ vérifie $P_\sigma X_\lambda = \lambda X_\lambda$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $\omega(k) = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}k\right)$.

(d) On définit $F = \Big(\omega\big((k-1)(\ell-1)\big)\Big)_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$ et $\overline{F}$ la matrice obtenue en remplaçant chaque coefficient de F par son conjugué. On remarquera que, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, la ℓ-ième colonne de F est $X_{\omega(\ell-1)}$.

Calculer le produit $F\,\overline{F}$ et en déduire que $F \in GL_n(\mathbb{C})$.

(e) Montrer que $F^{-1}P_\sigma F = \operatorname{diag}\big(\omega(0), \omega(1), \ldots, \omega(n-1)\big)$.

7. Exprimer la relation de récurrence (⌛) sous la forme $\forall t \in \mathbb{N}, X_{t+1} = AX_t$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice que l'on exprimera à l'aide de la matrice P_σ.
8. En déduire que l'on a $\forall t \in \mathbb{N}, X_t = F\,\operatorname{diag}(\lambda_1^t, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_n^t)\,F^{-1}\,X_0$, où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres réels que l'on précisera.

La suite de cette partie parle de convergence de suites de matrices (colonnes ou carrées).

Une suite de matrices $(M_t)_{t\in\mathbb{N}}$ converge vers M si et seulement si, pour tous indices i et j, le coefficient (i,j) de M_t converge vers celui de M quand t tend vers $+\infty$.

On n'hésitera pas à utiliser les résultats habituels sur la convergence dans ce contexte. Notamment, si $(M_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(N_t)_{t\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de matrices convergeant vers M et N respectivement, alors $M_t\,N_t \xrightarrow[t\to+\infty]{} M\,N$.

9. On suppose n pair. Montrer que la suite $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.
10. On suppose n impair.

    (a) Montrer que $X_t \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{n}u$.

    (b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{N}, \left\| X_t - \frac{1}{n}u \right\|_\infty \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)^t$.

Partie III. Théorème des mariages de Hall (1935).

Dans toute cette partie, on fixe un ensemble fini Ω.
On dit que p parties $A_1, \ldots, A_p \subseteq \Omega$ vérifient la *condition de Hall* si on a l'inégalité de cardinaux :

$$\forall K \in \mathcal{P}([\![1, p]\!]), \left| \bigcup_{k\in K} A_k \right| \geqslant |K|\,.$$

On s'intéresse à l'existence d'un *système de représentants distincts* (en abrégé, SRD), c'est-à-dire à l'existence d'un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in \Omega^p$ tel que

- l'on ait $\forall k \in [\![1, p]\!], x_k \in A_k$;
- les p éléments $x_1, x_2, \ldots, x_p$ soient tous différents.

Par exemple, pour les quatre parties $A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{1, 3\}, A_3 = \{3\}, A_4 = \{2, 3, 4\}$ de $\Omega = [\![1, 4]\!]$, le quadruplet $(2, 1, 3, 4)$ est un SRD (on peut d'ailleurs vérifier que c'est le seul).

Le but de cette partie est de démontrer le *théorème des mariages de Hall*, qui affirme qu'il existe un SRD pour $A_1, \ldots, A_p$ si et seulement s'ils vérifient la condition de Hall.

11. Soit $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{P}(\Omega)$.
    Montrer que s'il existe un SRD pour les parties $A_1, \dots, A_p$, ils vérifient la condition de Hall.

Pour montrer que la condition de Hall est également suffisante, nous allons maintenant procéder par récurrence forte.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{H}(p)$ l'assertion :

> quelles que soient $A_1, \dots, A_p \subseteq \Omega$ vérifiant la condition de Hall, elles admettent un SRD.

L'initialisation $\mathcal{H}(1)$ étant évidente, on fixe un entier $p \geqslant 2$, on suppose $\mathcal{H}(1), \mathcal{H}(2), \dots, \mathcal{H}(p-1)$ vraies, et on cherche à montrer $\mathcal{H}(p)$.

Soit donc $A_1, \dots, A_p \subseteq \Omega$ vérifiant la condition de Hall.

12. On suppose ici qu'il existe $L \subseteq [\![1, p]\!]$ de cardinal $\ell \in [\![1, p-1]\!]$ telle que $\left|\bigcup_{j \in L} A_j\right| = \ell$.
    En appliquant notamment l'hypothèse $\mathcal{H}(\ell)$, montrer qu'il existe un SRD pour $A_1, \dots, A_p$.
13. Conclure la démonstration par récurrence.

Partie IV. Théorème de Birkhoff-von Neumann (1946).

> On note Λ l'ensemble des familles $(\lambda_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_n}$ de réels **positifs** tels que $\sum_{\sigma \in \Sigma_n} \lambda_\sigma = 1$. On définit alors l'*enveloppe convexe de l'ensemble des matrices de permutation*
>
> $$\mathcal{C}_n = \left\{ \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \lambda_\sigma P_\sigma \;\middle|\; (\lambda_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_n} \in \Lambda \right\}.$$
>
> Le but principal de cette partie est de montrer le *théorème de Birkhoff-von Neumann* : $\mathcal{B}_n = \mathcal{C}_n$.

14. Montrer $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{B}_n$.
15. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $M \geqslant 0$ et qu'il existe $s \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $Mu = M^T u = su$.
    En utilisant le théorème des mariages de Hall, montrer qu'il existe $\sigma \in \Sigma_n$ et $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$M - \mu P_\sigma \geqslant 0.$$

16. Conclure la démonstration du théorème de Birkhoff-von Neumann.