Quatrième composition de mathématiques

Durée : *4 heures (aucune sortie ne sera autorisée pendant les dix dernières minutes).*

Sauf mention explicite du contraire, tout doit toujours être parfaitement justifié.

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.
- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci* $\boxed{\textit{d'encadrer}}$ *ou de souligner vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre.*

Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.

Comme souvent, le sujet est vraisemblablement trop long pour être traité convenablement en quatre heures : ne paniquez pas et appliquez-vous pour bien réussir les questions que vous entreprenez.

Exercice. Gudermannien.

1. **Fonction argument sinus hyperbolique.**
   (a) **Question de cours.** Rappeler la définition de la fonction sh, sa dérivée, et son graphe.
   (b) Montrer que la fonction sh est bijective et dessiner le graphe de sa réciproque.

   Dans la suite du problème, on note argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la réciproque de sh.

   (c) Montrer que argsh est dérivable et que $\forall y \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}}$.

2. **Gudermannien et pendule simple**
   (a) Par des études de fonctions, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(\operatorname{sh} x) = \arcsin(\operatorname{th} x)$ et que la fonction $x \mapsto \arctan(\operatorname{sh} x)$ induit une bijection $\operatorname{gd} : \mathbb{R} \to I$, où I est un intervalle que l'on précisera.

   La bijection $\operatorname{gd} : \mathbb{R} \to I$ est le *gudermannien*.

   (b) Donner une expression de la réciproque $\operatorname{gd}^{-1} : I \to \mathbb{R}$, et en déduire qu'elle est dérivable, de dérivée $y \mapsto \dfrac{1}{\cos y}$.
   (c) Déduire de ce qui précède que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{gd}'(x) = \cos(\operatorname{gd}(x))$.
   (d) Montrer que la fonction $\varphi = 2\operatorname{gd}$ est deux fois dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi''(x) + \sin(\varphi(x)) = 0$.

Problème. Groupes engendrés par deux involutions.

- Un élément g d'un groupe $(G, \cdot)$ est une *involution* si $g^2 = 1_G$.
- On rappelle que deux éléments g_1, g_2 d'un groupe $(G, \cdot)$ sont *conjugués* si $\exists h \in G : g_2 = h\, g_1\, h^{-1}$.
  On notera $\sim$ la relation de conjugaison.

Partie I. Généralités.

Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

1. **Conjugaison.**
   (a) Montrer que la relation de conjugaison $\sim$ est une relation d'équivalence sur G.
   On notera simplement $[g]$ la classe d'un élément $g \in G$ pour cette relation d'équivalence.
   (b) On note $Z(G) = \left\{ g \in G \,\middle|\, \forall h \in G, gh = hg \right\}$ le *centre* de G. Soit $g \in G$.
   Montrer que $g \in Z(G)$ si et seulement si sa classe de conjugaison $[g]$ est un singleton.
   (c) Montrer que deux éléments conjugués de G ont toujours le même ordre.
   (d) Soit Q un groupe et $f : G \to Q$ un morphisme de groupes. Montrer que le noyau $\ker(f)$ est *stable par conjugaison*, c'est-à-dire que $\forall g \in \ker(f), [g] \subseteq \ker(f)$.
2. **Involutions.**
   (a) On suppose que G est un groupe fini d'ordre 2021. Combien G a-t-il d'involutions ?
   (b) Soit $a, b \in G$ deux involutions. Montrer que ab est conjugué à son propre inverse.
3. On suppose que G est un groupe abélien engendré par deux involutions.
   Montrer que G est fini, de cardinal 1, 2 ou 4.
4. **Un théorème d'isomorphisme.** Soit Q_1 et Q_2 deux groupes et $\pi_1 : G \to Q_1$ et $\pi_2 : G \to Q_2$ deux morphismes de groupes surjectifs tels que $\ker(\pi_1) = \ker(\pi_2)$.
   On va montrer que cela entraîne que Q_1 et Q_2 sont isomorphes.
   (a) Montrer qu'il existe une unique application $f : Q_1 \to Q_2$ telle que $\forall \xi \in G, f\big(\pi_1(\xi)\big) = \pi_2(\xi)$.
   (b) Montrer que f est un isomorphisme.

Partie II. G_0 et les groupes diédraux finis.

Groupe G_0. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère les matrices

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

On note $G_0 = \left\{ M_\theta \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ N_\theta \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\}$ l'ensemble de ces matrices.

5. (a) Soit $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$. Calculer les produits $M_\alpha M_\beta$, $M_\theta N_0$, $N_0 M_\theta$ et $N_0 M_\theta N_0$.
   On exprimera les réponses comme des matrices M_γ ou N_γ, pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$.
   (b) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En utilisant la question précédente, et sans revenir à des calculs de matrices, calculer $M_\alpha N_\beta$, $N_\alpha M_\beta$ et $N_\alpha N_\beta$.
   (c) En déduire que G_0 est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

Groupes diédraux D_{2n}**.** Dans toute la fin de cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On note alors

$$D_{2n} = \left\{ M_{\frac{2\pi k}{n}} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ N_{\frac{2\pi k}{n}} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

6. (a) Montrer que D_{2n} est un sous-groupe de G_0, dont on déterminera le cardinal.
   (b) Déterminer l'ordre de $M_{\frac{2\pi}{n}}$ et celui de N_0.
   (c) En déduire que D_{2n} est le sous-groupe engendré $\langle M_{\frac{2\pi}{n}}, N_0 \rangle$.
   (d) Montrer que N_0 et $N_{\frac{2\pi}{n}}$ sont des involutions et que $D_{2n} = \langle N_0, N_{\frac{2\pi}{n}} \rangle$.
7. On suppose n impair. Montrer qu'il existe exactement deux morphismes de groupes $D_{2n} \to \mathbb{U}_2$.

Partie III. D_∞ et les groupes engendrés par deux involutions.

Dans toute la fin du problème, on note D_∞ l'ensemble des applications $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ qui sont :

- soit de la forme $x \mapsto x + n$, pour un certain entier $n \in \mathbb{Z}$;
- soit de la forme $x \mapsto n - x$, pour un certain entier $n \in \mathbb{Z}$.

Ces applications sont toutes bijectives (on ne demande pas de le montrer), si bien que D_∞ est une partie du groupe $\big(\mathfrak{S}(\mathbb{Z}), \circ\big)$ des bijections $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
On note simplement id l'élément neutre $\mathrm{id}_\mathbb{Z}$ de $\mathfrak{S}(\mathbb{Z})$.
Enfin, on nomme trois éléments de D_∞ :

$$r : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ x \mapsto 1 - x \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ x \mapsto -x \end{cases} \qquad \text{et} \qquad t = r \circ s : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ x \mapsto x + 1. \end{cases}$$

On utilise la notation puissance dans le groupe $\big(\mathfrak{S}(\mathbb{Z}), \circ\big)$.
Par exemple, étant donné $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{Z})$, et $n \in \mathbb{N}^*$, la notation f^n désigne la composée $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

8. Montrer que tout élément de D_∞ s'écrit de manière unique, soit sous la forme t^n, soit sous la forme $t^n \circ s$, pour un certain entier $n \in \mathbb{Z}$.
9. Montrer que D_∞ est un sous-groupe infini de $\mathfrak{S}(\mathbb{Z})$ et déterminer l'ordre de chacun de ses éléments.
10. Montrer que $D_\infty = \langle s, t \rangle = \langle r, s \rangle$.
11. **Propriété universelle.** Soit G un groupe (noté multiplicativement) et $\theta, \sigma \in G$ tels que $\sigma^2 = 1_G$ et $\sigma\theta\sigma^{-1} = \theta^{-1}$. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $f : D_\infty \to G$ tel que $f(s) = \sigma$ et $f(t) = \theta$.
12. En utilisant la question précédente, construire un morphisme de groupes $f : D_\infty \to D_4$ tel que $f(r) \neq f(s)$. En déduire que r et s ne sont pas conjugués.
13. Montrer que les classes de conjugaison de D_∞ sont $R = \left\{ t^{2k+1} \circ s \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$, $S = \left\{ t^{2k} \circ s \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$, et un nombre infini de classes finies que l'on précisera.
14. Soit Q un groupe et $f : D_\infty \to Q$ un morphisme de groupes. Montrer que le noyau $\ker(f)$ est l'un des sous-groupes suivants :
    - $\langle t^n \rangle$, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$;
    - $R \cup \langle t^2 \rangle$ ou $S \cup \langle t^2 \rangle$;
    - D_∞.
15. Soit G un groupe engendré par deux involutions, a et b.
    (a) Montrer qu'il existe un morphisme surjectif $f : D_\infty \to G$.
    (b) Déduire de tout ce qui précède que G est soit trivial, soit isomorphe à D_{2n} pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$, soit isomorphe à D_∞.

Partie IV. Automorphismes de D_∞.

On note $\mathrm{Aut}(D_\infty)$ l'ensemble des automorphismes de D_∞, qui est un sous-groupe de $\big(\mathfrak{S}(D_\infty), \circ\big)$ (on ne demande pas de le montrer).
Pour tout $h \in D_\infty$, on note $\varphi_h : \begin{cases} D_\infty \to & D_\infty \\ \quad g \mapsto & h \circ g \circ h^{-1} \end{cases}$.

16. Montrer que $\Phi : \begin{cases} D_\infty \to & \mathrm{Aut}(D_\infty) \\ \quad h \mapsto & \varphi_h \end{cases}$ est un morphisme de groupes bien défini et injectif.
17. Montrer que Φ n'est pas un isomorphisme.
18. Malgré la question précédente, montrer que D_∞ et $\mathrm{Aut}(D_\infty)$ sont isomorphes.