# Sixième composition de mathématiques [corrigé]

## Exercice. Autour de la série harmonique.

## Partie I.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction $f \in D^1(]-1,+\infty[)$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et $\Sigma_n(f) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right)$.

1. (a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

*Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a*

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \left(\sum_{k=n+2}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0, \end{aligned}$$

*donc la suite $S$ est (strictement) croissante.*

(b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera sa limite $S_\infty$.

*Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient, par majoration grossière*

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \leqslant 1,$$

*donc la suite $S$ est majorée.*
*D'après le théorème de la limite monotone, $S$ converge.*

2. (a) On suppose $f(0) \neq 0$. Montrer que la suite $\big(\Sigma_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

*Supposons $f(0) > 0$, l'autre cas étant analogue (ou s'y ramenant directement, si l'on étudie la suite $(\Sigma_n(-f))_{n\in\mathbb{N}^*} = (-\Sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui divergera d'après le cas que nous allons traiter).*
*Notons $\alpha = f(0)/2 > 0$. La fonction $f$ est dérivable en $0$, donc elle est continue en $0$ et on peut trouver $\delta > 0$ tel que $\forall x \in ]-1,+\infty[\,, |f(x) - f(0)| \leqslant \alpha$, d'où il vient $\forall x \in ]-1,+\infty[\,, f(x) \geqslant \alpha$.*
*Si $n \geqslant \dfrac{1}{\alpha}$, on aura, pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, l'inégalité $0 \leqslant \dfrac{1}{k} \leqslant \alpha$, donc $f\left(\dfrac{1}{k}\right) \geqslant \alpha$ et*

$$\sum_{k=n+1}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right) \geqslant n\,\alpha.$$

*Par théorème de minoration, cela entraîne $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

(b) On suppose $f(0)=0$. En revenant à la définition de la dérivée comme limite, montrer que la suite $\left(\Sigma_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et donner une expression de sa limite en fonction de $S_\infty$.

*On va montrer* $\Sigma_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} S_\infty\, f'(0)$. *Soit* $\varepsilon > 0$.

*Comme* $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0)$, *on peut trouver* $\delta > 0$ *tel que*

$$\forall x \in \left]-1,+\infty\right[, |x| \leqslant \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x} - f'(0)\right| \leqslant \varepsilon.$$

*Soit* $n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$. *Pour tout* $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, *on a* $\left|k\, f\left(\dfrac{1}{k}\right) - f'(0)\right| \leqslant \varepsilon$, *d'où* $\left|f\left(\dfrac{1}{k}\right) - \dfrac{f'(0)}{k}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{k}$.
*On a alors*

$$\begin{aligned}
\left|\Sigma_n(f) - f'(0)\, S_n\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right) - f'(0) \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\right| \\
&\leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \left|f\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{f'(0)}{k}\right| && \textit{(inég. triang.)} \\
&\leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon\, S_n \\
&\leqslant \varepsilon\, S_\infty.
\end{aligned}$$

*Comme* $S_\infty$ *est une constante, cela montre que* $\Sigma_n(f) - f'(0)\, S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
*On en déduit que* $\Sigma_n(f) = f'(0)\, S_n + \left(\Sigma_n(f) - f'(0)\, S_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(0)\, S_\infty$.

(c) Déduire de ce qui précède la valeur de $S_\infty$, à l'aide de la fonction $h : x \mapsto \ln(1+x)$.

- *On a*

$$\begin{aligned}
\Sigma_n(h) &= \sum_{k=n+1}^{2n} \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}_{=\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)} \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) \\
&= \ln(2n+1) - \ln(n+1) \\
&= \ln\left(2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right) - \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \ln(2) + \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2.
\end{aligned}$$

- *Par ailleurs, la question précédente montre que* $\Sigma_n(h) \xrightarrow[n\to+\infty]{} h'(0)\, S_\infty = S_\infty$.
- *Par unicité de la limite, on en déduit* $S_\infty = \ln 2$.

## Partie II. Moyenne logarithmique.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

3. (a) Montrer que les suites $\big(H_n - \ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(H_n - \ln(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

   - *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On a*
     - $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1}$ ;
     - $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$ ;
     - *(par conséquent,)* $\ln(n+2) - \ln(n+1) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$.
   - *On a vu en cours l'inégalité (de convexité)* $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[, \ln(1+x) \leqslant x$.
     *En particulier, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

     $$\big(H_{n+1} - \ln(n+1)\big) - \big(H_n - \ln(n)\big) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant 0$$
     $$\big(H_{n+1} - \ln(n+2)\big) - \big(H_n - \ln(n+1)\big) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \geqslant 0,$$

     *donc* $\big(H_n - \ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *décroît et* $\big(H_n - \ln(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *croît.*
   - *Par ailleurs,*

     $$\big(H_n - \ln(n)\big) - \big(H_n - \ln(n+1)\big) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

     *par continuité du logarithme.*

   *Cela montre que les suites sont adjacentes.*

   (b) Utiliser la question précédente pour déterminer à nouveau la limite $S_\infty$ de la partie I.

   *La question précédente et le théorème des suites adjacentes montrent que* $H_n - \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$, *pour un certain* $\gamma \in \mathbb{R}$.
   *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On a alors*

   $$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= H_{2n} - H_n && \textit{(Chasles)} \\ &= \ln(2n) + (H_{2n} - \ln(2n)) - \ln(n) - (H_n - \ln(n)). \end{aligned}$$

   *Comme* $\ln(2n) - \ln(n) = \ln 2$ *et que* $(H_{2n} - \ln(2n)) - (H_n - \ln(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma - \gamma = 0$, *on en déduit à nouveau* $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$.

   (c) Déterminer la limite de $\left(\dfrac{1}{\ln n} H_n\right)_{n\geqslant 2}$.

   *On a* $H_n - \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$, *donc* $\dfrac{1}{\ln n} H_n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *par opérations, ce qui entraîne*

   $$\frac{1}{\ln n} H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

4. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

   (a) On suppose $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer $\dfrac{1}{H_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   *Soit* $\varepsilon > 0$.
   *Comme* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*, on peut trouver* $N \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \varepsilon$.
   *On a alors, pour tout* $n \geqslant N$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{k}\right| &\leqslant \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{N}\frac{|u_k|}{k} + \frac{1}{H_n}\sum_{k=N+1}^{n}\underbrace{\frac{|u_k|}{k}}_{\leqslant \varepsilon/k}\\ &\leqslant \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{N}\frac{|u_k|}{k} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{H_n}\sum_{k=N+1}^{n}\frac{1}{k}}_{\leqslant \varepsilon}.\end{aligned}$$

   *Comme* $\dfrac{1}{H_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{|u_k|}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*, on peut donc trouver* $H \geqslant N$ *tel que* $\forall n \geqslant H, \left|\dfrac{1}{H_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{u_k}{k}\right| \leqslant 2\varepsilon$*,*
   *ce qui conclut.*

   (b) On suppose $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Déterminer la limite de $\left(\dfrac{1}{\ln n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{k}\right)_{n\geqslant 2}$.

   *Posons* $v = (u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}^*}$*, de telle sorte que* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   *La question précédente montre que*

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{k} = \underbrace{\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{v_k}{k}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} + \underbrace{\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ell}{k}}_{=\ell} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

   *En multipliant par la suite* $\left(\dfrac{H_n}{\ln n}\right)_{n\geqslant 2}$*, dont on a vu qu'elle convergeait vers* $1$*, on en déduit*

$$\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

5. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que, si $\dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{1}{\ln n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

   *On va utiliser l'indication, en posant* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$*. Notons déjà que* $U_0 = 0$.
   *Par télescopage,* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{U_k}{k+1} - \frac{U_{k-1}}{k}\right) = \frac{U_n}{n+1} - \frac{U_0}{1} = \frac{U_n}{n+1} = \frac{n}{n+1}\frac{U_n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$
   *D'un autre côté, on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{U_k}{k+1} - \frac{U_{k-1}}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{\frac{U_k}{k+1} - \frac{U_k}{k}}_{=-\frac{U_k}{k(k+1)}} + \underbrace{\frac{U_k}{k} - \frac{U_{k-1}}{k}}_{=\frac{U_k - U_{k-1}}{k} = \frac{u_k}{k}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{k(k+1)},$$

$$\textit{donc} \quad \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} = \underbrace{\frac{1}{\ln n} \frac{U_n}{n+1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{k(k+1)}.$$

*Or, la question précédente, appliquée à la suite* $\left(\frac{U_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$*, montre* $\frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{k(k+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$*, ce qui conclut.*

(b) Donner un exemple montrant que la réciproque de la question précédente est fausse.

*Considérons* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = ((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- *On montre facilement que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*,*

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \begin{cases} -\dfrac{n}{2} & \textit{si } n \textit{ est pair ;} \\ \dfrac{n+1}{2} & \textit{si } n \textit{ est impair} \end{cases} \qquad \textit{donc} \qquad \begin{cases} \dfrac{U_{2n}}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{U_{2n+1}}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

*ce qui montre que* $\left(\frac{U_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *diverge.*

- *Par ailleurs, la suite* $\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ne prend que les valeurs* $-1$ *et* $0$*, donc*

$$\frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k k}{k} = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

## Problème. Problème de Dyer.

# Partie I. Préliminaires sur les points fixes et périodiques.

1. **Lemme-clef.** Soit $x \in \mathrm{Fix}(f)$. Montrer que $g(x) \in \mathrm{Fix}(f)$.

   *On a* $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$*, ce qui montre* $g(x) \in \mathrm{Fix}(f)$.

2. **Non-vacuité de** $\mathrm{Fix}(h)$**.** Soit $h : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que $\mathrm{Fix}(h)$ est non vide.

   *L'exercice a été fait en TD.*

   *On applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction* $\gamma : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto h(x) - x \end{cases}$*, qui est continue (par opérations) sur l'intervalle* $[0,1]$*. Comme* $\gamma(0) = h(0) \geqslant 0$ *et* $\gamma(1) = h(1) - 1 \leqslant 0$*, on peut trouver* $c \in [0,1]$ *tel que* $\gamma(c) = 0$*, d'où* $h(c) = c$.

3. **Fermeture de** $\mathrm{Fix}(h)$**.** Soit $h : [0,1] \to [0,1]$ continue.

   (a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathrm{Fix}(h)$.
   On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $x_\infty$. Montrer que $x_\infty \in \mathrm{Fix}(h)$.

   - *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $h(x_n) = x_n$.
   - *D'un côté, on a* $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_\infty$.
   - *Par continuité de* $h$*, on a* $h(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} h(x_\infty)$.

*Par unicité de la limite, on a* $h(x_\infty) = x_\infty$*, ce qui montre que* $x_\infty \in \mathrm{Fix}(h)$.

(b) En déduire que $\overline{\mathrm{Fix}(h)} = \mathrm{Fix}(h)$.

- *Soit* $x_\infty \in \overline{\mathrm{Fix}(h)}$.
  *D'après la caractérisation séquentielle de l'adhérence, on peut trouver une suite* $x \in \mathrm{Fix}(h)^{\mathbb{N}}$ *telle que* $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_\infty$.
  *D'après la question précédente,* $x_\infty \in \mathrm{Fix}(h)$*, ce qui montre l'inclusion directe.*
- *L'inclusion réciproque est tautologique.*

(c) Montrer que $\mathrm{Fix}(h)$ possède un maximum et un minimum.

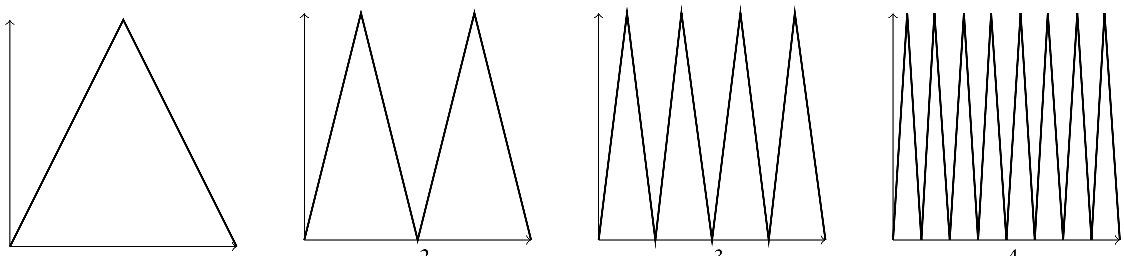
*L'ensemble* $\mathrm{Fix}(h)$ *est non vide (d'après la question 2) et borné (en tant que partie de* $[0,1]$*), donc il admet une borne inférieure et une borne supérieure.*
*On sait que ces bornes* $\inf \mathrm{Fix}(h)$ *et* $\sup \mathrm{Fix}(h)$ *sont des éléments de l'adhérence* $\overline{\mathrm{Fix}(h)}$*. D'après la question précédente, on en déduit qu'ils appartiennent même à* $\mathrm{Fix}(h)$*, ce qui en fait respectivement le minimum et le maximum de l'ensemble* $\mathrm{Fix}(h)$.

4. **Un exemple.** On considère la *fonction tente* $\tau : \begin{cases} [0,1] \to [0,1] \\ x \mapsto \min(2x, 2-2x). \end{cases}$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $D_k = \left\{ \dfrac{m}{2^k} \;\middle|\; m \in [\![0, 2^k]\!] \text{ impair} \right\}$.

(a) Montrer que $\tau$ est continue, et dessiner le graphe de $\tau$ et celui de $\tau^2$.

*Toute fonction affine est continue, le minimum de deux fonctions continues est continu, donc* $\tau$ *est continu par opérations.*
*On obtient rapidement les deux graphes suivants (et deux de plus, pour la beauté du geste).*



$\tau$ $\tau^2$ $\tau^3$ $\tau^4$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\tau[D_{k+1}] = D_k$.

*On procède par double inclusion.*

- *Soit* $y \in \tau[D_{k+1}]$.
  *On peut donc trouver* $x \in D_{k+1}$ *tel que* $y = \tau(x)$*, puis* $m \in [\![0, 2^{k+1}]\!]$ *impair tel que* $x = \dfrac{m}{2^{k+1}}$.
  *On a alors* $y = \tau(x) = \dfrac{m'}{2^k}$*, où* $m' = m$ *si* $m \leqslant 2^k$ *et* $m' = 2^{k+1} - m$ *sinon. Dans tous les cas, on voit que* $m \in [\![0, 2^k]\!]$ *est impair, ce qui montre* $y = \tau(x) \in D_k$.
- *Réciproquement, soit* $y \in D_k$*. On peut trouver* $m \in [\![0, 2^k]\!]$ *impair tel que* $y = \dfrac{m}{2^k}$.
  *On a alors* $x = \dfrac{m}{2^{k+1}} \in D_{k+1}$ *et* $y = 2x = \tau(x)$*, ce qui conclut.*

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_k$. Calculer $\tau^{k-1}(x), \tau^k(x)$ et $\tau^{k+1}(x)$.

*Par une récurrence immédiate, on a* $\tau^{k-1}(x) \in D_1$*, donc* $\tau^{k-1}(x) = \dfrac{1}{2}$.

*On en déduit* $\tau^k(x) = \tau\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$ *et* $\tau^{k+1}(x) = \tau(1) = 0$.

(d) Montrer que $\text{Pér}(\tau)$ et $[0,1] \setminus \text{Pér}(\tau)$ sont denses dans $[0,1]$.

- *Soit* $a < b$ *deux éléments de* $[0,1]$.
  *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$, *l'intervalle* $]2^p\, a, 2^p\, b[$ *est inclus dans* $[0, 2^p]$ *et est de longueur* $2^p\,(b-a)$. *Si* $p$ *est suffisamment grand, cette longueur est* $> 2$, *donc on peut trouver un entier impair* $m \in [\![0, 2^p]\!]$. *On a donc* $\dfrac{m}{2^p} \in D_p \cap ]a, b[$.
  *On a ainsi montré que l'intervalle ouvert* $]a, b[$ *contient un élément* $x \in D_k$ *pour tout* $k$ *suffisamment grand.*
- *D'après la question précédente,* $\tau^\ell(x) = 0$ *pour tout élément de* $D_k$ *et tout* $\ell \geqslant k$.
  *Comme* $x \in D_k$, *on a* $x \neq 0$, *ce qui montre notamment que* $x$ *n'est pas périodique. On a donc trouvé un élément de* $[0,1] \setminus \text{Pér}(\tau)$ *dans l'intervalle* $]a, b[$, *ce qui montre la densité de* $[0,1] \setminus \text{Pér}(\tau)$ *dans* $[0,1]$.
- *On peut par ailleurs affiner le premier point du raisonnement : en choisissant* $p$ *si grand que la longueur de* $]2^p\, a, 2^p\, b[$ *soit* $> 3$, *on peut trouver des entiers consécutifs appartenant à cet intervalle. Notons* $m$ *celui des deux qui est impair, et* $m \pm 1$ *l'autre.*
  *L'intervalle* $]a, b[$ *contient alors* $\dfrac{m}{2^p} \in D_p$ *et* $\dfrac{m \pm 1}{2^p}$, *qui vaut* $0$ *ou* $1$ *ou est élément d'un ensemble* $D_q$, *pour* $q < p$, *comme on le voit en mettant la fraction sous forme irréductible.*
  *Ainsi, on a* $f^p\left(\dfrac{m}{2^p}\right) = 1$ *et* $f^p\left(\dfrac{m \pm 1}{2^p}\right) = 0$, *ce qui montre que la fonction* $x \mapsto f^p(x) - x$, *continue par opérations, change de signe sur l'intervalle joignant* $\dfrac{m}{2^p}$ *et* $\dfrac{m \pm 1}{2^p}$. *En lui appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on trouve un élément* $c$, *situé entre* $\dfrac{m}{2^p}$ *et* $\dfrac{m \pm 1}{2^p}$ *(donc* a fortiori *élément de* $]a, b[$*), tel que* $f^p(c) = c$, *ce qui conclut.*

## Partie II. Cas monotone (et autres cas faciles).

5. On suppose $f$ décroissante.
   (a) Que dire de $\text{Fix}(f)$ ?

   *Par opérations, la fonction* $x \mapsto f(x) - x$ *est strictement monotone. Elle est donc injective, ce qui prouve que* $\text{Fix}(f)$ *possède au plus un élément.*
   *D'après 2, cet ensemble est non vide, et on en déduit que* $\text{Fix}(f)$ *est un singleton.*

   (b) En déduire que dans ce cas, $f$ et $g$ possèdent un point fixe commun.

   *Notons* $x_0$ *l'unique point fixe de* $f$.
   *D'après le lemme-clef, on a* $g(x_0) \in \text{Fix}(f)$, *c'est-à-dire* $g(x_0) = x_0$, *ce qui conclut.*

6. On suppose que $\text{Fix}(f)$ est un intervalle. Montrer que $f$ et $g$ possèdent un point fixe commun.

   - *Puisque* $\text{Fix}(f)$ *est un intervalle, la question 3c entraîne qu'il s'agit d'un segment.*
   - *Le segment* $\text{Fix}(f)$ *est stable sous* $g$, *d'après le lemme-clef.*
   - *Comme à la question 2, on obtient que* $g$ *possède un point fixe* $x_0 \in \text{Fix}(f)$.
     *On a donc* $f(x_0) = g(x_0) = x_0$.

7. (a) On suppose que, pour tout $x_0 \in [0,1]$, la suite $\left(f^n(x_0)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
   Montrer que $f$ et $g$ possèdent un point fixe commun.

   - *D'après la question 2,* $g$ *possède un point fixe* $x_0$.
     *La suite* $\left(f^n(x_0)\right)$ *converge alors, vers un point que l'on notera* $x_\infty$.

- *Le lemme-clef (appliqué « à l'envers » à* $g$ *et* $f$*) et une récurrence immédiate montrent que cette suite est à valeurs dans* $\mathrm{Fix}(g)$.
- *Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, on en déduit* $x_\infty \in \overline{\mathrm{Fix}(g)}$*, et donc l'appartenance* $x_\infty \in \mathrm{Fix}(g)$.
- *Par ailleurs, l'argument classique sur les suites récurrentes montre que* $x_\infty \in \mathrm{Fix}(f)$ *: on a* $\left(f^{n+1}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(f\left(f^n(x)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$*, qui converge vers* $x_\infty$ *(par extraction) et vers* $f(x_\infty)$ *par continuité de* $f$.

  *Par unicité de la limite, on en déduit* $f(x_\infty) = x_\infty$*, ce qui conclut.*

(b) En déduire que, si $f$ est croissante, alors $f$ et $g$ possèdent un point fixe commun.

*Si* $f$ *est croissante et* $x_0 \in [0,1]$*, la suite* $\left(f^n(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est à valeurs dans* $[0,1]$ *(et donc bornée) par une récurrence immédiate, et elle est monotone par croissance de* $f$ *(cf. cours).*

*D'après le théorème de la limite monotone, cette suite converge. On peut alors appliquer le résultat de la question précédente.*

## Partie III. Le cas acyclique (Maxfield-Mourant et Chu-Moyer (1965-1966)).

> Dans toute la section, on fixe $h : [0,1] \to [0,1]$ continue.
>
> Étant donné $x_0 \in [0,1]$, on note $\omega(x_0)$ (ou $\omega_h(x_0)$ s'il y a un risque d'ambiguïté) l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\left(h^n(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
>
> Le but de la section est de montrer que, pour tout $x_0 \in [0,1]$, $\omega(x_0) \cap \overline{\mathrm{Pér}(h)} \neq \varnothing$, puis d'en déduire une nouvelle réponse partielle au problème de Dyer.

Soit $x_0 \in [0,1]$.

8. Montrer que l'ensemble $\omega(x_0)$ est stable sous $h$, c'est-à-dire que $\forall z \in \omega(x_0)$, $h(z) \in \omega(x_0)$.

   *Soit* $\ell \in \omega(x_0)$*. On peut donc trouver une extractrice* $\varphi$ *telle que* $f^{\varphi(n)}(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

   *En appliquant* $f$*, on obtient (notamment par continuité de* $f$*) que* $f^{\varphi(n)+1}(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$*, ce qui montre* $f(x_0) \in \omega(x_0)$*, et conclut.*

9. On suppose que la suite $\left(h^n(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ prend un nombre fini de valeurs.

   (a) Montrer qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $h^p(x_0) \in \mathrm{Pér}(h)$.

   *D'après le principe des tiroirs (dans sa version infinie), la suite* $n \mapsto h^n(x_0)$ *ne peut pas être injective. On peut donc trouver deux entiers différents* $p$ *et* $q$ *(on peut même supposer* $p < q$*) tels que* $h^q(x_0) = h^p(x_0)$*. Notons* $s = q - p \in \mathbb{N}^*$*. La condition se réécrit alors* $h^s\left(h^p(x_0)\right) = h^p(x_0)$*, c'est-à-dire* $h^p(x_0) \in \mathrm{Fix}(h^s) \subseteq \mathrm{Pér}(h)$.

   (b) On fixe un entier $p$ minimal tel que $h^p(x_0) \in \mathrm{Pér}(h)$. Décrire $\omega(x_0)$ et conclure.

   *Soit* $s \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $h^s\left(h^p(x_0)\right) = h^p(x_0)$.

   *On montre alors, par double inclusion, que* $\omega(x_0) = \left\{h^p(x_0), h^{p+1}(x_0), \ldots, h^{p+s-1}(x_0)\right\}$.

   - *Dans le sens direct, si* $\varphi$ *est une extractrice telle que* $\left(h^{\varphi(n)}(x_0)\right)$ *converge (vers* $\lambda$*), le principe des tiroirs entraîne qu'elle prend une infinité de valeurs dans l'un des ensembles d'indices* $E_\ell = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant p \text{ et } n \equiv \ell \pmod s\}$ *(pour une certaine valeur* $\ell \in [\![0, s-1]\!]$

     *On construit alors une nouvelle extractrice « sélectionnant ces valeurs », c'est-à-dire une extractrice* $\psi$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}, \psi(n) \in E_\ell$*. On a alors*

     - $h^{\varphi(\psi(n))}(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$ *par extraction ;*
     - $\forall n \in \mathbb{N}, h^{\varphi(\psi(n))}(x_0) = h^{p+\ell}(x_0)$*, vu la définition de* $E_\ell$.

*Par unicité de la limite, on en déduit que $\lambda = h^{p+\ell}(x_0)$, ce qui conclut la démonstration de l'inclusion directe.*

- *Réciproquement, pour tout $\ell \in [\![0, s-1]\!]$, on a $h^{p+\ell+sk}(x_0) \xrightarrow[k\to+\infty]{} h^{p+\ell}(x_0)$, ce qui montre l'inclusion réciproque.*

***Remarque.*** *On n'a en fait pas utilisé l'hypothèse de minimalité sur $p$.*

On peut montrer (c'est par exemple une conséquence du lemme de Zorn) qu'il existe en toute généralité un nombre $\mu \in \omega(x_0)$ tel qu'en outre $\mu = \min(\omega(\mu))$. Dans la suite de cette section, on admet ce résultat, et on fixe un tel nombre $\mu$.

10. On suppose désormais que $\left(h^n(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ prend un nombre infini de valeurs différentes.

(a) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*, h^p(\mu) \geqslant \mu$.

*On a, par hypothèse, $\mu \in \omega(\mu)$ (il s'agit même du minimum de cet ensemble). D'après 8 et une récurrence immédiate, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $h^p(\mu) \in \omega(\mu)$, d'où l'on déduit $h^p(\mu) \geqslant \mu$ car $\mu$ minore $\omega(\mu)$.*

(b) On suppose maintenant $\forall p \in \mathbb{N}^*, h^p(\mu) > \mu$. Soit $\varepsilon > 0$.
Montrer qu'il existe deux entiers $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mu < h^{p+q}(\mu) < h^p(\mu) \leqslant \mu + \varepsilon$.

*Comme $\mu \in \omega(\mu)$, on peut trouver une extractrice $\varphi$ telle que $h^{\varphi(k)}(\mu) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mu$. D'après l'hypothèse supplémentaire, cette suite ne prend que des valeurs $> \mu$.*

- *On peut alors trouver $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left|h^{\varphi(k_0)}(\mu) - \mu\right| \leqslant \varepsilon$. L'hypothèse supplémentaire traduit cette relation en l'appartenance $h^{\varphi(k_0)}(\mu) \in ]\mu, \mu+\varepsilon[$.*
- *On recommence alors : comme $h^{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mu$, on peut trouver un entier $k_1 > k_0$ tel que $\left|h^{\varphi(k_1)}(\mu) - \mu\right| \leqslant \dfrac{\left|h^{\varphi(k_0)}(\mu) - \mu\right|}{2}$.*

*On conclut alors en posant $p = \varphi(k_0)$ et $q = \varphi(k_1) - \varphi(k_0)$, tous deux éléments de $\mathbb{N}^*$.*

(c) Conclure.

- *Supposons $\forall p \in \mathbb{N}^*, h^p(\mu) > \mu$. Soit $\varepsilon > 0$.*
*Fixons $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mu < h^{p+q}(\mu) < h^p(\mu) \leqslant \mu + \varepsilon$, à l'aide de la question précédente.*
*En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $\delta : x \mapsto h^q(x) - x$ (continue sur l'intervalle $[0, 1]$ et vérifiant $\delta(\mu) = h^q(\mu) - \mu > 0$ et $\delta(h^p(\mu)) = h^{p+q}(\mu) - h^p(\mu) < 0$, on peut trouver $c \in [\mu, h^p(\mu)]$ tel que $h^q(c) = c$.*
A fortiori, *on a $|c - \mu| \leqslant \varepsilon$.*
*On a ainsi montré $\forall \varepsilon > 0, \exists c \in \text{Pér}(h) : |c - \mu| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire que $\mu \in \overline{\text{Pér}(h)}$, ce qui conclut.*
- *Si, au contraire, on suppose $\exists p \in \mathbb{N}^* : h^p(\mu) = \mu$, on a $\mu \in \text{Pér}(h) \cap \omega(x_0) \subseteq \overline{\text{Pér}(h)} \cap \omega(x_0)$, ce qui conclut encore plus rapidement.*

11. On suppose $\text{Pér}(f) = \text{Fix}(f)$. Montrer que $f$ et $g$ possèdent un point fixe commun.

*Soit $x_0 \in \text{Fix}(g)$. D'après la question précédente, on peut trouver $\mu \in \overline{\text{Pér}(f)} \cap \omega_f(x_0)$.*
*Comme $\mu \in \omega_f(x_0)$, on peut trouver une extractrice $\varphi$ telle que $f^{\varphi(k)}(x_0) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mu$. Le lemme-clef montre que $\forall k \in \mathbb{N}, f^{\varphi(k)}(x_0) \in \text{Fix}(g)$, donc $\mu \in \overline{\text{Fix}(g)} = \text{Fix}(g)$.*
*Par ailleurs, en utilisant notamment la question 3c, on a $\mu \in \overline{\text{Pér}(f)} = \overline{\text{Fix}(f)} = \text{Fix}(f)$.*
*Cela montre que $\mu$ est un point fixe commun à $f$ et $g$.*

## Partie IV. Théorème de Cano (1984).

Un ensemble $\mathscr{F}$ de fonctions continues $[0,1] \to [0,1]$ est dit *équicontinu* en $a \in [0,1]$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall f \in \mathscr{F}, \forall x \in [0,1], |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Le même ensemble est dit *équicontinu* s'il est équicontinu en $a$, pour tout $a \in [0,1]$.

12. **Un exemple.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n : \begin{cases} [0,1] \to [0,1] \\ x \mapsto x^n \end{cases}$ et $\mathscr{P} = \{p_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

   (a) Montrer que $\mathscr{P}$ est équicontinu en $0$.

   *Soit* $\varepsilon > 0$.
   *Posons* $\delta = \varepsilon > 0$. *Soit* $f \in \mathscr{P}$ *(on peut donc trouver* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $f : x \mapsto x^n$*) et* $x \in [0,\delta]$.

   - *Si* $n = 0$, *la fonction* $f$ *est constante, donc on a* $0 = |f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon$.
   - *Si* $n \geqslant 1$, *on a* $0 \leqslant f^n(x) \leqslant x$, *donc* $|f(x)| = |f(x) - f(0)| \leqslant |x - 0| \leqslant \varepsilon$.

   (b) Montrer que $\mathscr{P}$ n'est pas équicontinu en $1$.

   *Supposons par l'absurde que* $\mathscr{P}$ *soit équicontinu en* $1$. *On pourrait alors trouver* $\delta \in \,]0,1[$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [1-\delta, 0]\,, |1 - x^n| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   *Or,* $(1-\delta)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *donc* $|1 - (1-\delta)^n|$ *est* $> 1/2$ *pour certaines valeurs de* $n$ *(et même pour toutes, à partir d'un certain rang), ce qui fournit la contradiction souhaitée.*

   (c) Soit $a \in \,]0,1[$. L'ensemble de fonctions $\mathscr{P}$ est-il équicontinu en $a$ ?

   *On va montrer que* $\mathscr{P}$ *est équicontinu en* $a$. *Fixons une fois pour toutes* $b \in \,]a,1[$.
   *Soit* $\varepsilon > 0$.

   - *Comme* $b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *on peut trouver* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N, b^n \leqslant \varepsilon$. *En particulier, en posant* $\eta = b - a > 0$, *on a*

   $$\forall n \geqslant N, \forall x \in [0,1], |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| \leqslant \varepsilon.$$

   - *Toutes les fonctions* $f_0, f_1, \dots, f_N$ *sont continues en* $a$. *On peut donc trouver, pour tout indice* $k \in [\![0,N]\!]$, *un réel* $\delta_k > 0$ *tel que*

   $$\forall x \in [0,1], |x-a| \leqslant \delta_k \Rightarrow |f_k(x) - f_k(a)| \leqslant \varepsilon.$$

   *En posant* $\widehat{\delta} = \min(\eta, \delta_0, \dots, \delta_N)$, *on a ainsi bien*

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], |x-a| \leqslant \widehat{\delta} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| \leqslant \varepsilon,$$

   *ce qui conclut.*

Dans la fin de ce devoir, on suppose que l'ensemble $\{f^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ des itérées de $f$ est équicontinu, et on cherche à montrer que $\mathrm{Fix}(f)$ est un intervalle, ce qui entraînera que $f$ et $g$ possèdent un point fixe commun, d'après la partie II.

13. On suppose par l'absurde que $\mathrm{Fix}(f)$ n'est pas un intervalle.
Montrer qu'il existe $a < b \in \mathrm{Fix}(f)$ tels que $\forall x \in \,]a,b[\,, f(x) > x$ ou $\forall x \in \,]a,b[\,, f(x) < x$.

*Comme* $\mathrm{Fix}(f)$ *n'est pas un intervalle, on peut trouver* $\widetilde{a} < \widetilde{b}$ *et* $c \in \left]\widetilde{a}, \widetilde{b}\right[ \setminus \mathrm{Fix}(f)$.

*Les mêmes arguments qu'à la question 3c montrent que* $\mathrm{Fix}(f) \cap [\widetilde{a}, c] = \mathrm{Fix}(f) \cap [\widetilde{a}, c[$ *possède un maximum* $a$ *et, de même,* $\mathrm{Fix}(f) \cap \left[c, \widetilde{b}\right]$ *possède un minimum* $b$.

*On a donc obtenu* $a < b \in \mathrm{Fix}(f)$ *tels que* $\forall x \in \,]a, b[\,, f(x) \neq x$. *Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (appliqué à la fonction continue* $x \mapsto f(x) - x$ *sur l'intervalle* $]a, b[$*) entraîne alors que l'on a soit* $\forall x \in \,]a, b[\,, f(x) > x$, *soit* $\forall x \in \,]a, b[\,, f(x) > x$

14. Par symétrie, on se place dans le cas où $\forall x \in \,]a, b[\,, f(x) > x$.
    Montrer que l'on ne peut pas avoir $\forall x \in \,]a, b[\,, f^n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$, et en déduire l'existence d'un point $z \in \,]a, b[$ tel que $f(z) = b$ et $\forall x \in \,]a, z[\,, f(x) < b$.

    - *On peut trouver* $\delta > 0$ *tel que* $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, |x - a| \leqslant \delta \Rightarrow |f^n(x) - f(a)| \leqslant \dfrac{b-a}{2}$, *par définition de l'équicontinuité.*

      *Or,* $f(a) = a$, *donc cela entraîne* $\forall x \in [0, 1]\,, \forall n \in \mathbb{N}, |x - a| \leqslant \delta \Rightarrow f^n(x) \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

      *En particulier, pour un tel* $x$, *on ne peut pas avoir* $f^n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$.
    - *Supposons maintenant par l'absurde* $\forall x \in \,]a, b[\,, f(x) < b$. *On en déduirait, comme dans le cours sur les suites récurrentes, que la suite* $\left(f^n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *serait croissante et à valeurs dans* $]a, b[$. *Elle devrait donc avoir une limite* $\ell$. *Celle-ci devrait vérifier* $\ell \in \overline{]a, b[} = [a, b]$, $\ell \geqslant x$ *et* $f(\ell) = \ell$ *(à cause de l'argument standard), donc on devrait avoir* $\ell = b$.

      *Cela est exclu, donc on a démontré* $\exists x \in \,]a, b[\, : f(x) \geqslant b$.
    - *L'ensemble* $\{\zeta \in [a, b] \mid f(\zeta) \geqslant b\}$ *est donc non vide et minoré (par* $a$*), donc on peut considérer sa borne inférieure* $z = \inf\{\zeta \in [a, b] \mid f(\zeta) \geqslant b\}$.

      *Par construction, on a* $\forall x \in \,]a, z[\,, f(x) < b$. *Comme dans la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires, on montre également* $f(z) = b$, *ce qui conclut.*

15. Aboutir à une contradiction.

    *Notons* $z_1$ *l'antécédent de* $b$ *construit à la question précédente.*
    *Comme* $f(a) = a$ *et* $f(z_1) = b > z_1$, *on peut trouver* $z_2 \in \,]a, z_1[$ *tel que* $f(z_2) = z_1$.
    *Et ainsi de suite... On construit de la sorte, par récurrence, une suite strictement décroissante* $(z_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ *d'élements de* $]a, b[$ *tels que* $\forall k \geqslant 2, f(z_j) = z_{j-1}$ *et* $f(z_1) = b$.
    *D'après le théorème de la limite monotone, la suite* $(z_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ *doit avoir une limite* $z_\infty \in [a, b]$.
    *On alors* $\left(f(z_j)\right)_{j \geqslant 2} = \left(z_{j-1}\right)_{j \geqslant 2}$ *qui converge à la fois vers* $f(z_\infty)$ *et vers* $z_\infty$, *donc* $f(z_\infty) = z_\infty$.
    *Comme l'intervalle* $]a, b[$ *ne contient pas de point fixe pour* $f$ *et que* $z_\infty \leqslant z < b$, *on en déduit que* $z_\infty = a$, *c'est-à-dire que* $z_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} a$.
    *Comme* $\mathscr{F}$ *est équicontinu en* $a$ *(et que les éléments de* $\mathscr{F}$ *fixent* $a$*), on devrait pouvoir trouver* $\delta > 0$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], |x - a| \leqslant \delta \Rightarrow |f^n(x) - a| \leqslant \dfrac{b-a}{2}$.
    *Or, la suite* $(x_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ *converge vers* $a$, *donc on a* $|x_j - a| \leqslant \delta$ *à partir d'un certain rang, et pourtant, pour tout* $j \in \mathbb{N}^*$, $f^j(x_j) = b$, *ce qui entraîne* $\left|f^j(z_j) - a\right| > \dfrac{b-a}{2}$ *et fournit la contradiction tant attendue.*