Septième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1

1. Donner le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$.

   On a

$$\ln(\operatorname{ch} x) = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4) \quad \textit{car} \begin{cases} \ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2) \\ u = \operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\ o(u^2) = o(x^4) \end{cases}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

2. Donner le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \exp(\tan x)$.

$$\exp(\tan x) = 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + o(x^2)\right)^3 + \frac{1}{24}(x + o(x))^4 + o(x^4)$$

$$\textit{car} \begin{cases} \exp(u) = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + \dfrac{u^4}{24} + o(u^4) \\ u = \tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\ o(u^4) = o(x^4) \end{cases}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4).$$

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que l'équation $x^n + x - 1 = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$, que l'on notera x_n.

   Notons $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n + x \end{cases}$.
   Par opérations, f_n *est continue, strictement croissante,* $f_n(0) = 0$ *et* $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
   D'après le théorème de la bijection monotone, elle induit une bijection $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.
   A fortiori, *pour la fonction* f_n, *le nombre* 1 *possède un unique antécédent, ce qui conclut.*

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et convergente, et déterminer sa limite.

   Notons déjà que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0 \leqslant 1$ *et* $f_n(1) = 2 \geqslant 1$. *Par stricte croissance de la fonction* f_n *(ou par croissance de sa réciproque), on a donc* $x_n \in [0,1]$. *En particulier, la suite* x *est bornée.*
   Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. *On a* $x_n^{n+1} \leqslant x_n^n$, *d'où* $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n \leqslant x_n^n + x_n = 1$.
   Par stricte croissance de f_{n+1}, *on en déduit* $x_{n+1} \geqslant x_n$.

3. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : y \mapsto n\ \ln(1-y) - \ln y$.
   Déterminer des équivalents simples des suites $\left(g_n\left(\dfrac{\ln n}{2n}\right)\right)_{n\geqslant 2}$ et $\left(g_n\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)\right)_{n\geqslant 2}$.

   On a $\dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *par croissance comparée, puis*

$$\begin{aligned} g_n\left(\frac{\ln n}{2n}\right) &= n\ \ln\left(1-\frac{\ln n}{2n}\right) - \ln\left(\frac{\ln n}{2n}\right) \\ &= n\left(-\frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) + \ln(n) - \ln(\ln n) + \ln(2) \quad \textit{car} \begin{cases} \ln(1+u) = u + o(u) \\ u = \dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ o(u) = o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right) \end{cases} \\ &= \frac{\ln n}{2} + o(\ln n). \end{aligned}$$

   Il faut être un tout petit peu plus précis dans le terme d'erreur pour le second équivalent. On a

$$\begin{aligned} g_n\left(\frac{\ln n}{n}\right) &= n\ \ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right) - \ln\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\ &= n\left(-\frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\right) + \ln(n) - \ln(\ln n) \quad \textit{car} \begin{cases} \ln(1+u) = u + O(u^2) \\ u = \dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ O(u^2) = O\left(\dfrac{\ln^2 n}{n^2}\right) \end{cases} \\ &= -\ln(\ln n) + O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right) \\ &= -\ln(\ln n) + o\left(\ln(\ln n)\right), \end{aligned}$$

   car $\dfrac{\ln^2 n}{n} = o(1) = o\left(\ln(\ln n)\right)$, *par croissance comparée.*
   In fine, $g_n\left(\dfrac{\ln n}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{2}$ *et* $g_n\left(\dfrac{\ln n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(\ln n)$.

4. On pose $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (1-x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Utiliser la question précédente pour montrer que pour n assez grand, on a l'encadrement $\dfrac{\ln n}{2n} \leqslant y_n \leqslant \dfrac{\ln n}{n}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   La relation $f_n(x_n) = 1$ *se réécrit* $(1-y_n)^n = y_n$, *donc* $n\ \ln(1-y_n) = \ln y_n$, *c'est-à-dire* $g_n(y_n) = 0$.
   Par ailleurs, la fonction g_n *est dérivable sur* $]0,1[$ *par opérations et* $g_n' : y \mapsto -\dfrac{n}{1-y} - \dfrac{1}{y}$ *est strictement négative.*
   Comme $y_n, \dfrac{\ln n}{n}, \dfrac{\ln n}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *ces trois suites sont à valeurs dans* $]0,1[$ *à partir d'un certain rang.*
   Les calculs d'équivalents de la question précédente montrent notamment que $g_n\left(\dfrac{\ln n}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ *et* $g_n\left(\dfrac{\ln n}{2n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *donc à partir d'un certain rang, on a l'encadrement*

$$g_n\left(\frac{\ln n}{n}\right) \leqslant g_n(y_n) \leqslant g_n\left(\frac{\ln n}{2n}\right)$$

   ce qui donne, par stricte croissance de g_n,

$$\frac{\ln n}{2n} \leqslant y_n \leqslant \frac{\ln n}{n}.$$

5. Montrer $\ln y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln n$, et en déduire un développement asymptotique de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à la précision $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

   L'encadrement de la question précédente et la croissance du logarithme donnent à partir d'un certain rang

$$-\ln n + \ln(\ln n) - \ln 2 \leqslant \ln y_n \leqslant \ln n - \ln(\ln n),$$

   d'où

$$1 + \underbrace{\frac{\ln(\ln n)}{-\ln n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \leqslant \frac{\ln y_n}{-\ln n} \leqslant 1 + \underbrace{\frac{\ln(\ln n) - \ln 2}{-\ln n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

   et le théorème des gendarmes entraîne $\frac{\ln y_n}{-\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, *c'est-à-dire* $\ln y_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\ln n$.
   On a

$$\begin{aligned}
& n\ \ln(x_n) = n\ \ln(1-y_n) = \ln(y_n) = -\ln n + o(n) \\
\textit{donc} \qquad & \ln(x_n) = -\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\
\textit{donc} \qquad & x_n = \exp\left(-\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) \\
& \quad = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \qquad \textit{car} \begin{cases} \exp(u) = 1 + u + o(u) \\ u = -\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ o(u) = o\left(\frac{\ln n}{n}\right). \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice 3

Soit $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de suites réelles strictement positives convergeant vers 0.

Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^{(k)}$ est un élément de $(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Montrer qu'il existe une suite $w \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, u_n^{(k)} = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)\,.$$

- *On commence par considérer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $v^{(k)} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ définie par* $\left(v_n^{(k)}\right) = \left(\sqrt{u_n^{(k)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Par construction, cette suite est strictement positive et $v_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
  On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_n^{(k)}}{v_n^{(k)}} = \frac{u_n^{(k)}}{\sqrt{u_n^{(k)}}} = \sqrt{u_n^{(k)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

  ce qui montre $u_n^{(k)} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(v_n^{(k)}\right)$.

- *Il suffit maintenant de construire une suite* $w \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ *convergeant vers* 0 *et vérifiant les relations de domination* $\forall k \in \mathbb{N}, v_n^{(k)} = \underset{n\to+\infty}{O}(w_n)$ *pour conclure.*

  Pour tout $k \in \mathbb{N}$*, la suite* $\left(\max\left(v_n^{(0)}, \dots, v_n^{(k)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0 *par opérations. On peut notamment trouver* $N_k \in \mathbb{N}$ *tel que*

  $$\forall n \geqslant N_k, \max\left(v_n^{(0)}, \dots, v_n^{(k)}\right) \leqslant 2^{-k}.$$

  En effectuant la construction par récurrence, et quitte à remplacer à chaque étape N_k *par un entier plus grand, on peut supposer que la suite* $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*
  On définit alors une suite w *de la façon suivante : un entier* $n \geqslant N_0$ *vérifie* $N_k \leqslant u_n < N_{k+1}$ *pour un unique entier* $k \in \mathbb{N}$*, que l'on va noter* $k(n)$*. Par construction,* $k(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$*.*

  On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$*,*

  $$w_n = \begin{cases} 1 & \textit{si } n < N_0 \\ \max\left(v_n^{(0)}, \dots, v_n^{(k(n))}\right) & \textit{si } n \geqslant N_0. \end{cases}$$

  - *La suite* w *est clairement strictement positive.*
  - *Par construction, on a* $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_k, v_n^{(k)} \leqslant w_n$*, et donc* $\forall k \in \mathbb{N}, v_n^{(k)} = \underset{n\to+\infty}{O}(w_n)$*.*
  - *On a* $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \leqslant 2^{-k(n)}$*, donc* $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*.*

  Cela conclut.

Problème. Calcul ombral.

- Dans tout le problème,
  - on note $D : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$ l'opérateur de dérivation, qui est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (on ne demande pas de le vérifier) ;
  - pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $T_a : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(X+a) \end{cases}$ l'opérateur de translation, qui est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (*idem*) ;
  - pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $\text{év}_a : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(a) \end{cases}$ l'application d'évaluation.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $H_n = X(X-1)\cdots(X-n+1) \in \mathbb{R}[X]$.
  Naturellement, $H_0 = 1$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\text{év}_a \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$.

   Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On a*

$$\text{év}_a\,(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)(a) = P(a) + \lambda\, Q(a) = \text{év}_a(P) + \lambda\ \text{év}_a(Q),$$

   ce qui conclut.

2. Montrer que $\mathscr{H} = (H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

   On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(H_n) = \deg\left(\prod_{i=0}^{n-1}(X-i)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \deg(X-i) = n$.
   Cela montre que la famille $\mathscr{H}$ *est échelonnée au sens fort : il s'agit donc d'une base.*

Partie I. Deux applications combinatoires du calcul ombral.

3. **Formule d'inversion de Möbius-Pascal.** Soit $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) Montrer qu'il existe une application linéaire $\xi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \xi(X^n) = x_n$.

   Il s'agit de la propriété universelle des bases, appliquée à la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}[X]$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\xi\,((X+1)^n)$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *On a*

$$\begin{aligned}
\xi\,((X+1)^n) &= \xi\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\right) && \textit{(binôme de Newton)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{\xi(X^k)}_{=x_k} && \textit{(ξ linéaire)} \\
&= y_n.
\end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer le polynôme X^n comme une combinaison linéaire des polynômes $1, X+1, (X+1)^2, \ldots, (X+1)^n$.

On a

$$\begin{aligned} X^n &= ((X+1)-1)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (X+1)^k && \textit{(binôme de Newton).} \end{aligned}$$

(d) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} y_k$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On a*

$$\begin{aligned} x_n &= \xi(X^n) \\ &= \xi\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (X+1)^k\right) && \textit{(question précédente)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \xi\left((X+1)^k\right) && \textit{(}\xi\textit{ linéaire)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} y_k. \end{aligned}$$

4. **Nombre de partitions.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et S un ensemble fini de cardinal n.
On appelle *partition* de S tout ensemble de parties de S non vides et deux à deux disjointes recouvrant l'ensemble S. Par exemple, $\pi_0 = \big\{\{1,3,4\},\{2\},\{5,6\}\big\}$ est une partition de $[\![1,6]\!]$. On notera $\Pi(S)$ l'ensemble des partitions de S, $B_n = |\Pi(S)|$ le nombre de partitions de S et, pour tout $\pi \in \Pi(S)$, on notera $c(\pi)$ le nombre de parties dans la partition π.
Dans notre exemple, $c(\pi_0) = 3$.
On admet la formule $\forall x \in \mathbb{N}, x^n = \displaystyle\sum_{\pi \in \Pi(S)} x(x-1)\cdots(x-c(\pi)+1)$, que l'on peut obtenir en étudiant les applications de S vers un ensemble fini de cardinal x.

(a) Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon(H_n) = 1$.

Il suffit d'appliquer la propriété universelle des bases à la base $\mathscr{H}$.

(b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \varepsilon(X^n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Par rigidité des polynômes, l'assertion $\forall x \in \mathbb{N}, x^n = \displaystyle\sum_{\pi \in \Pi(S)} x(x-1)\cdots(x-c(\pi)+1)$ *donne l'égalité polynomiale* $X^n = \displaystyle\sum_{\pi \in \Pi(S)} H_{c(\pi)}$.
En appliquant ε, *il vient, par linéarité de* ε,

$$\varepsilon(X^n) = \sum_{\pi \in \Pi(s)} \varepsilon\left(H_{c(\pi)}\right) = \sum_{\pi \in \Pi(S)} 1 = |\Pi(S)| = B_n.$$

(c) Montrer $\forall P \in \mathbb{R}[X], \varepsilon\big(X\,P(X-1)\big) = \varepsilon(P)$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. *Comme* $\mathscr{H}$ *est une base de* $\mathbb{R}[X]$, *on peut trouver* $\lambda \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ *telle que* $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n H_n$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\varepsilon\big(X\,P(X-1)\big) &= \varepsilon\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n\, X\, H_n(X-1)\right) \\
&= \varepsilon\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n\, H_{n+1}\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \\
&= \varepsilon\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n\, H_n\right) \\
&= \varepsilon(P).
\end{aligned}$$

(d) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *En appliquant la question précédente à* $(X+1)^n$, *il vient* $\varepsilon(X^{n+1}) = \varepsilon\left((X+1)^n\right)$. *Or,*

$$\begin{aligned}
\varepsilon(X^{n+1}) &= B_{n+1} \\
\varepsilon\left((X+1)^n\right) &= \varepsilon\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon(X^k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.
\end{aligned}$$

Cela conclut.

Partie II. L'algèbre ombrale $\mathscr{F}$.

5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Montrer $\{n \in \mathbb{N} \mid D^n(P) = 0\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n > \deg P\}$.

   Notons $d = \deg P \in \mathbb{N}$.
   Les formules sur le degré du polynôme dérivé montrent les égalités $\forall k \leqslant d, \deg(D^k(P)) = d - k$ *(qui entraîne* $\forall k \leqslant d, D^k(P) \neq 0$*) et* $\forall k > d, D^k(P) = 0$. *Cela conclut.*

- Pour tout $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on définit l'application

$$F_u : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ \quad P \;\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\deg P} u_n\, D^n(P). \end{cases}$$

  où, si $\deg P = -\infty$, la somme est considérée comme vide (et donc $F_u(0) = 0$).
- On note $\mathscr{F} = \left\{F_u \,\middle|\, u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right\}$.

6. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'application F_u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

   Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Puisque $\forall n > \deg P, D^n(P) = 0$, *on voit que l'on peut écrire*

$$F_u(P) = \sum_{n=0}^{d} u_n \, D^n(P),$$

   pour tout entier $d \geqslant \deg P$.
   En particulier, on peut fixer $d \geqslant \max(\deg P, \deg Q)$. *On a alors* $d \geqslant \deg(P + \lambda Q)$ *et*

$$\begin{aligned} F_u(P + \lambda Q) &= \sum_{n=0}^{d} u_n \, D^n(P + \lambda Q) \\ &= \sum_{n=0}^{d} u_n \, \left(D^n(P) + \lambda D^n(Q)\right) && \textit{(}D^n \textit{ linéaire)} \\ &= \sum_{n=0}^{d} u_n \, D^n(P) + \lambda \sum_{n=0}^{d} u_n \, D^n(Q) \\ &= F_u(P) + \lambda \, F_u(Q). \end{aligned}$$

7. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ non nulle. On note $\nu = \min\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq 0\}$. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \deg\left(F_u(P)\right) = \begin{cases} \deg P - \nu & \text{si } \nu \leqslant \deg P \\ -\infty & \text{si } \nu > \deg P. \end{cases}$$

   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
   - *Si* $\deg P < \nu$, *on a* $\forall n \geqslant \nu, D^n(P) = 0$, *donc* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \, D^n(P) = 0$.
     Cela montre $F_u(P) = 0$.
   - *Si* $\deg P \geqslant \nu$, *on a* $\deg D^\nu(P) = \deg P - \nu$ *et* $u_\nu \neq 0$, *donc* $\deg\left(u_\nu \, D^\nu(P)\right) = \deg P - \nu$.
     Par ailleurs, $\forall n < \nu, u_n \, D^n(P) = 0$ *et* $\forall n > \nu, \deg\left(u_n \, D^n(P)\right) < \deg P - \nu$, *donc*

$$\deg F_u(P) = \deg\left(\underbrace{u_\nu \, D^\nu(P)}_{\textit{degré } \deg P - \nu} + \underbrace{\sum_{n=\nu+1}^{\deg P} u_n \, D^n(P)}_{\textit{degré } < \deg P - \nu} \right) = \deg P - \nu.$$

Dans la question précédente, on dira que ν est *l'ordre* de l'opérateur F_u.

8. **Détermination de $\mathscr{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$.**
   (a) Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{év}_0\left(F_u(X^n)\right)$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *On a*

$$\begin{aligned} \text{év}_0\left(F_u(X^n)\right) &= \text{év}_0\left(\sum_{k=0}^{n} u_k \, D^k(X^n)\right) \\ &= \text{év}_0\left(\sum_{k=0}^{n} u_k \, n(n-1)\cdots(n-k+1) \, X^{n-k}\right) \\ &= n(n-1)\cdots 1 \, 0^{n-n} \, u_n = n! \, u_n. \end{aligned}$$

(b) Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $F \in \mathscr{F}$ tel que $\varphi = \text{év}_0 \circ F$.

Posons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{\varphi(X^n)}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
D'après la question précédente, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(X^n) = (\text{év}_0 \circ F_u)(X^n)$.
Les applications φ *et* $\text{év}_0 \circ F_u$ *étant linéaires (par composition pour celle-ci, par hypothèse pour celle-là) et la base canonique étant* a fortiori *génératrice de* $\mathbb{R}[X]$*, le prolongement des identités entraîne* $\varphi = \text{év}_0 \circ F_u$*, ce qui conclut.*

9. **Opérateurs commutant aux translations.** On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}[X])_0$ l'ensemble des endomorphismes $\Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ tels que $\forall a \in \mathbb{R}, \Phi \circ T_a = T_a \circ \Phi$. On va montrer $\mathscr{L}(\mathbb{R}[X])_0 = \mathscr{F}$.

(a) Montrer $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])_0$.

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*. Il s'agit de montrer que* F_u *commute aux translations. Soit* $a \in \mathbb{R}$.
Soit $P \in \mathbb{R}$*. On a* $\deg T_a(P) = \deg P(X+a) = \deg P$*, car* $X + a$ *est non constant. Notons* d *ce degré commun à* T_a *et à* P.
Comme $(X+a)' = 1$*, on a* $D\big(P(X+a)\big) = P'(X+a)$*. Par une récurrence immédiate, pour tout* $k \in \mathbb{N}, D^k(P(X+a)) = D^k(P)(X+a)$.
On a ainsi

$$\begin{aligned}
(T_a \circ F_u)(P) &= \left(\sum_{k=0}^{d} u_k\, D^k(P)\right)(X+a) \\
&= \sum_{k=0}^{d} u_k\, D^k(P)(X+a) \\
&= \sum_{k=0}^{d} u_k\, D^k\big(P(X+a)\big) \\
&= F_u(P(X+a)) \\
&= (F_u \circ T_a)(P),
\end{aligned}$$

ce qui montre que T_a *et* F_u *commutent.*

(b) Pour les deux prochaines questions, on fixe $\Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$.
Montrer qu'il existe $F \in \mathscr{F}$ tel que $\text{év}_0 \circ F = \text{év}_0 \circ \Phi$.

Il suffit de remarquer que, par composition, $\text{év}_0 \circ \Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$*, et d'appliquer la question précédente.*

(c) Montrer $F = \Phi$, et conclure.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$*. Soit* $a \in \mathbb{R}$*. On a*

$$\begin{aligned}
\Phi(P)(a) &= \big(T_a(\Phi(P))\big)(0) \\
&= \text{év}_0\,(T_a(\Phi(P))) \\
&= \text{év}_0\,(\Phi(T_a(P))) && \textit{(car } \Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])_0\textit{)} \\
&= (\text{év}_0 \circ \Phi)(T_a(P)) \\
&= (\text{év}_0 \circ F)(T_a(P)) && \textit{(question précédente)} \\
&= F(P)(a) && \textit{(en remontant les calculs, avec } F \textit{ au lieu de } \Phi\textit{).}
\end{aligned}$$

Cela montre que les polynômes $\Phi(P)$ *et* $F(P)$ *définissent la même fonction polynomiale. Par rigidité des polynômes, on en déduit* $\Phi(P) = F(P)$.
Cela étant valable pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$*, on en déduit* $\Phi = F$.

Partie III. Formules de Taylor et de Newton généralisées.

Dans cette section, on fixe un élément $\Delta \in \mathscr{F}$ d'ordre 1.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que Δ induit un endomorphisme

$$\widehat{\Delta} : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ \quad P \quad \mapsto \Delta(P) \end{cases}$$

dont on précisera l'image et le noyau.

- *Le fait que Δ soit d'ordre 1 montre immédiatement que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Delta(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, ce qui donne entre autres le fait que Δ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.*
- *Le fait que Δ soit d'ordre 1 montre également que $(\widehat{\Delta}(X), \widehat{\Delta}(X^2), \dots, \widehat{\Delta}(X^n))$ est une base échelonnée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On en déduit déjà*

$$\operatorname{im} \widehat{\Delta} = \operatorname{Vect}\left(\widehat{\Delta}(X), \widehat{\Delta}(X^2), \dots, \widehat{\Delta}(X^n)\right) = \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

- *Soit maintenant $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$. On a la chaîne d'équivalences*

$$\begin{aligned} P \in \ker \widehat{\Delta} \Leftrightarrow \Delta(P) &= 0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \Delta(X^k) && (\Delta \text{ linéaire}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Delta(X^k) && (\Delta(X^0) = 0) \\ &= \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0, \end{aligned}$$

car $\left(\Delta(X^k)\right)_{k=1}^{n}$ est échelonnée donc libre.
Ainsi, $\ker \Delta = \operatorname{Vect}(X^0) = \mathbb{R}_0[X]$.

11. Montrer qu'il existe une unique famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que
   (i) $Q_0 = 1$;
   (ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, Q_n(0) = 0$;
   (iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta(Q_n) = n\, Q_{n-1}$,

   et montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathbb{R}_n[X]_0 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\} = \ker(\text{év}_0) \cap \mathbb{R}_n[X]$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel dont une base est $\mathscr{C}_n = (X, X^2, \dots, X^n)$: cette famille est libre car échelonnée, et elle engendre clairement $\mathbb{R}_n[X]_0$.
Comme Δ est d'ordre 1, cet endomorphisme envoie $\mathscr{C}_n$ sur une base échelonnée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Cela montre que Δ induit un isomorphisme $\widetilde{\Delta}_n : \mathbb{R}_n[X]_0 \to \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Analyse. *Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes vérifiant les contraintes de l'énonce.*
On a notamment $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(Q_n \in \mathbb{R}_n[X]_0 \text{ et } \Delta(Q_n) = \underbrace{n\, Q_{n-1}}_{\in \mathbb{R}_{n-1}[X]}\right)$, ce qui montre la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*, \widetilde{\Delta}_n(Q_n) = Q_{n-1}$, ou encore $\forall n \in \mathbb{N}^*, Q_n = \widetilde{\Delta}_n^{-1}(Q_{n-1})$.

Synthèse. *Réciproquement, on vérifie sans difficulté que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence :*

$$Q_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, Q_n = \Delta_n^{-1}(Q_{n-1})$$

vérifie les trois conditions de l'énoncé.

Enfin, comme Δ *est d'ordre* 1*, on obtient* $\forall n \in \mathbb{N}, \deg Q_n = n$ *par une récurrence immédiate, ce qui montre que la famille* $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base échelonnée de* $\mathbb{R}[X]$*.*

12. Montrer la *formule de Taylor généralisée*

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P = \sum_{n=0}^{\deg P} \frac{\text{év}_0\left(\Delta^n(P)\right)}{n!} Q_n.$$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$*.*

Comme $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base échelonnée, on peut trouver* $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *tels que* $P = \sum_{n=0}^{\deg P} \lambda_n Q_n$*.*

On a alors, pour tout $k \in [\![0, \deg P]\!]$*,*

$$\begin{aligned}
\Delta^k(P) &= \sum_{n=0}^{\deg P} \lambda_n \Delta^k(Q_n) = \sum_{n=0}^{\deg P} \lambda_n n(n-1)\cdots(n-k+1)\, Q_{n-k} \\
\textit{donc} \quad \text{év}_0\left(\Delta^k(P)\right) &= \sum_{n=0}^{\deg P} \lambda_n n(n-1)\cdots(n-k+1)\, \underbrace{\text{év}_0(Q_{n-k})}_{=\delta_{n,k}} \\
&= \lambda_k\, k!.
\end{aligned}$$

Cela montre $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \dfrac{\text{év}_0\left(\Delta^n(P)\right)}{n!}$ *et conclut.*

13. Montrer la *formule de Newton généralisée*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathbb{R}, Q_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Q_k(x)\, Q_{n-k}(y).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $y \in \mathbb{R}$*. Appliquons la question précédente au polynôme* $P = Q_n(X+y)$ *: par commutation aux translations, on a, pour tout* $k \in \mathbb{N}$*,*

$$\begin{aligned}
\text{év}_0\left(\Delta^k(P)\right) &= \text{év}_0\left((\Delta^k \circ T_y)(Q_n)\right) \\
&= \text{év}_0\left((T_y \circ \Delta^k)(Q_n)\right) && \textit{(car } T_y \textit{ et } \Delta \textit{ commutent)} \\
&= \text{év}_y(\Delta^k(Q_n)) \\
&= n(n-1)\cdots(n-k+1)\, Q_{n-k}(y).
\end{aligned}$$

Ainsi, la question précédente donne

$$Q_n(X+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)Q_{n-k}(y)}{k!} Q_k.$$

Après évaluation en x *et simplification, on obtient*

$$Q_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Q_k(x)\, Q_{n-k}(y).$$