Septième composition de mathématiques

Durée : *4 heures.*

Les consignes de présentation sont les mêmes que d'habitude !

Les exercices d'analyse compteront pour une part non négligeable de la note (probablement proche d'un tiers). La précision dans les calculs sera primordiale : vérifiez-les !

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Donner le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$.
2. Donner le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \exp(\tan x)$.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que l'équation $x^n + x - 1 = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$, que l'on notera x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et convergente, et déterminer sa limite.
3. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : y \mapsto n\,\ln(1-y) - \ln y$.
   Déterminer des équivalents simples des suites $\left(g_n\left(\dfrac{\ln n}{2n}\right)\right)_{n\geqslant 2}$ et $\left(g_n\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)\right)_{n\geqslant 2}$.
4. On pose $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (1-x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Utiliser la question précédente pour montrer que pour n assez grand, on a l'encadrement $\dfrac{\ln n}{2n} \leqslant y_n \leqslant \dfrac{\ln n}{n}$.
5. Montrer $\ln y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln n$, et en déduire un développement asymptotique de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à la précision $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

Exercice 3

Cet exercice est difficile : n'y réfléchissez que si vous êtes très satisfait du reste de votre copie.

Soit $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de suites réelles strictement positives convergeant vers 0.

Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^{(k)}$ est un élément de $(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Montrer qu'il existe une suite $w \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, u_n^{(k)} = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n).$$

Problème. Calcul ombral.

► Dans tout le problème,

- on note $D : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$ l'opérateur de dérivation, qui est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (on ne demande pas de le vérifier) ;
- pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $T_a : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(X+a) \end{cases}$ l'opérateur de translation, qui est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (*idem*) ;
- pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $\text{év}_a : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(a) \end{cases}$ l'application d'évaluation.

► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $H_n = X(X-1)\cdots(X-n+1) \in \mathbb{R}[X]$.
Naturellement, $H_0 = 1$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\text{év}_a \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathscr{H} = (H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Partie I. Deux applications combinatoires du calcul ombral.

3. **Formule d'inversion de Möbius-Pascal.** Soit $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer qu'il existe une application linéaire $\xi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \xi(X^n) = x_n$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\xi\left((X+1)^n\right)$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer le polynôme X^n comme une combinaison linéaire des polynômes $1, X+1, (X+1)^2, \ldots, (X+1)^n$.
   (d) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} y_k$.
4. **Nombre de partitions.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et S un ensemble fini de cardinal n.
   On appelle *partition* de S tout ensemble de parties de S non vides et deux à deux disjointes recouvrant l'ensemble S. Par exemple, $\pi_0 = \big\{\{1,3,4\},\{2\},\{5,6\}\big\}$ est une partition de $[\![1,6]\!]$. On notera $\Pi(S)$ l'ensemble des partitions de S, $B_n = |\Pi(S)|$ le nombre de partitions de S et, pour tout $\pi \in \Pi(S)$, on notera $c(\pi)$ le nombre de parties dans la partition π.
   Dans notre exemple, $c(\pi_0) = 3$.
   On admet la formule $\forall x \in \mathbb{N}, x^n = \sum_{\pi\in\Pi(S)} x(x-1)\cdots(x-c(\pi)+1)$, que l'on peut obtenir en étudiant les applications de S vers un ensemble fini de cardinal x.
   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon(H_n) = 1$.
   (b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \varepsilon(X^n)$.
   (c) Montrer $\forall P \in \mathbb{R}[X], \varepsilon\big(X\,P(X-1)\big) = \varepsilon(P)$.
   (d) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i}$.

Partie II. L'algèbre ombrale $\mathscr{F}$.

5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Montrer $\{n \in \mathbb{N} \mid D^n(P) = 0\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n > \deg P\}$.

- Pour tout $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on définit l'application

$$F_u : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to & \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\deg P} u_n \, D^n(P). \end{cases}$$

où, si $\deg P = -\infty$, la somme est considérée comme vide (et donc $F_u(0) = 0$).

- On note $\mathscr{F} = \left\{ F_u \,\middle|\, u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \right\}$.

6. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'application F_u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
7. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ non nulle. On note $\nu = \min\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq 0\}$. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \deg\left(F_u(P)\right) = \begin{cases} \deg P - \nu & \text{si } \nu \leqslant \deg P \\ -\infty & \text{si } \nu > \deg P. \end{cases}$$

Dans la question précédente, on dira que ν est *l'ordre* de l'opérateur F_u.

8. **Détermination de $\mathscr{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$.**
   (a) Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{év}_0\left(F_u(X^n)\right)$.
   (b) Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $F \in \mathscr{F}$ tel que $\varphi = \text{év}_0 \circ F$.
9. **Opérateurs commutant aux translations.** On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}[X])_0$ l'ensemble des endomorphismes $\Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ tels que $\forall a \in \mathbb{R}, \Phi \circ T_a = T_a \circ \Phi$. On va montrer $\mathscr{L}(\mathbb{R}[X])_0 = \mathscr{F}$.
   (a) Montrer $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])_0$.
   (b) Pour les deux prochaines questions, on fixe $\Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$.
   Montrer qu'il existe $F \in \mathscr{F}$ tel que $\text{év}_0 \circ F = \text{év}_0 \circ \Phi$.
   (c) Montrer $F = \Phi$, et conclure.

Partie III. Formules de Taylor et de Newton généralisées.

Dans cette section, on fixe un élément $\Delta \in \mathscr{F}$ d'ordre 1.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que Δ induit un endomorphisme

$$\widehat{\Delta} : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ \quad P \quad \mapsto \Delta(P) \end{cases}$$

dont on précisera l'image et le noyau.

11. Montrer qu'il existe une unique famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que
    (i) $Q_0 = 1$;
    (ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, Q_n(0) = 0$;
    (iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta(Q_n) = n\,Q_{n-1}$,

    et montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}[X]$.

12. Montrer la *formule de Taylor généralisée*

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P = \sum_{n=0}^{\deg P} \frac{\text{év}_0\left(\Delta^n(P)\right)}{n!} Q_n.$$

13. Montrer la *formule de Newton généralisée*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathbb{R}, Q_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Q_k(x)\, Q_{n-k}(y).$$