Huitième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$ se prolonge par continuité en une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, et donner un $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\ln \circ f$.

   - *Déjà,* $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^*$.
   - *On a* $\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x$, *donc* $\dfrac{\operatorname{sh} x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, *ce qui montre que la fonction* $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$ *se prolonge par continuité en une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(0) = 1$.
   - *Par ailleurs, comme* sh *et* $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ *ont toujours le même signe, la fonction* f *est également* > 0 *sur* $\mathbb{R}^*$.
   - *On a*

$$
\begin{aligned}
& & \operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\
&\textit{donc} & \frac{\operatorname{sh} x}{x} &= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \\
&\textit{donc} & f(x) &= \ln\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) \\
& & &= \left(\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4) \\
& & & \qquad \textit{car} \begin{cases} \ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2) \\ u = \dfrac{x^2}{6} + o(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\ o(u^2) = o(x^4). \end{cases} \\
& & &= \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4).
\end{aligned}
$$

2. Donner un $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(\sin x)}$.

   On a

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ch}(\sin x) &= \operatorname{ch}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x + o(x)\right)^4 + o(x^4) \\
& \qquad \textit{car} \begin{cases} \operatorname{ch}(u) = 1 + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^4}{24} + o(u^4) \\ u = x + o(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\ o(u^4) = o(x^4) \end{cases} \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)
\end{aligned}
$$

$$\text{donc}\qquad \frac{1}{\operatorname{ch}(\sin x)} = 1-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)^2+\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2+o(x^4)$$

$$\text{car}\ \begin{cases}(1+u)^{-1}=1-u+u^2+o(u^2)\\ u=\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\xrightarrow[x\to 0]{}0\\ o(u^2)=o(x^4)\end{cases}$$

$$= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}x^4+o(x^4).$$

Problème. Théorèmes de Schur et de Burnside.

- Dans tout le problème, n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et K un corps.
- **Bases canoniques.**
  - On notera $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de K^n.
  - Si $i,j\in[\![1,n]\!]$, on note $E_{i,j}^{(n)}\in M_n(K)$ la matrice élémentaire de $M_n(K)$ dont le seul élément non nul est un 1, en position (i,j). S'il n'y a pas d'ambiguïté, on pourra la noter plus brièvement $E_{i,j}$.
- On rappelle qu'une *sous-algèbre* de $M_n(K)$ est une partie $A\subseteq M_n(K)$ qui est à la fois un sous-espace vectoriel du K-espace vectoriel $M_n(K)$ et un sous-anneau de l'anneau $M_n(K)$.
- Étant donné un K-espace vectoriel E, son *dual* est $E^*=\mathscr{L}(E,K)$.
- On note simplement $T_n(K)$ la sous-algèbre de $M_n(K)$ des matrices triangulaires supérieures.

Partie I. Préliminaires.

Quelques sous-algèbres de $M_n(K)$

1. Montrer que si A est une partie de $M_n(K)$ stable par multiplication et contenant I_n, alors $\operatorname{Vect}(A)$ est une sous-algèbre de $M_n(K)$.

   - *Le sous-espace vectoriel engendré* $\operatorname{Vect}(A)$ *est déjà clairement un sous-espace vectoriel de* $M_n(K)$*. En particulier, il est stable par différence.*
   - *Il contient* I_n *car* $I_n\in A$*.*
   - *Reste à montrer que* $\operatorname{Vect}(A)$ *est stable par produit. Soit* $M,N\in\operatorname{Vect}(A)$*.*
     On peut trouver $M_1,\dots,M_p\in A$, $N_1,\dots,N_q\in B$ *et* $\lambda_1,\dots,\lambda_p,\mu_1,\dots,\mu_q\in K$ *tels que l'on ait* $M=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\lambda_k A_k$ *et* $N=\displaystyle\sum_{\ell=1}^{q}\mu_\ell B_\ell$.
     On a alors, par bilinéarité du produit matriciel, $MN=\displaystyle\sum_{\substack{k\in[\![1,p]\!]\\ \ell\in[\![1,q]\!]}}\lambda_k\mu_q\underbrace{M_k N_\ell}_{\in A}\in\operatorname{Vect}(A)$.

2. Donner les dimensions des sous-algèbres $D_n(K)$ et $T_n(K)$, en rappelant rapidement une démonstration de ce que vous affirmez.

   - *On a* $\dim D_n(K)=n$*, car* $(E_{1,1},\dots,E_{n,n})$ *en est une base.*
   - *On a* $\dim T_n(K)=\dfrac{n(n+1)}{2}$*, car* $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ *en est une base, possédant* $1+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ *vecteurs (il y a* j *matrices de la forme* $E_{i,j}$ *dans cette base, pour tout* $j\in[\![1,n]\!]$*).*

3. Soit $q \in [\![1, n-1]\!]$.
Soit P_q l'ensemble des matrices $M \in M_n(K)$ telles que $\forall (i,j) \in [\![q+1, n]\!] \times [\![1, q]\!], [M]_{i,j} = 0$.

(a) Montrer qu'il s'agit d'une sous-algèbre de $M_n(K)$.

- *On vérifie directement que* P_q *est un sous-espace vectoriel de* $M_n(K)$*, par exemple parce qu'il s'agit du noyau de l'application*

$$\Theta : \begin{cases} M_n(K) & \to & M_{n-q,q}(K) \\ M & \mapsto & \left([M_{q+i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n-q \\ 1\leqslant j\leqslant n}}\right) \end{cases}$$

« extrayant » le bloc sud-ouest de la matrice, évidemment linéaire.

De manière moins précise mais plus visuelle, $\Theta : \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ C & D \end{array}\right) \mapsto C$.

- *Clairement,* $I_n = \left(\begin{array}{c|c} I_q & 0_{q,n-q} \\ \hline 0_{n-q,q} & I_{n-q} \end{array}\right) \in P_q$.
- *Soit* $M, N \in P_q$. *Soit* $(i,j) \in [\![q+1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$. *On a*

$$[MN]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [M]_{i,k}[N]_{k,j} = \sum_{k=1}^{q} \underbrace{[M]_{i,k}}_{=0}[N]_{k,j} + \sum_{k=q+1}^{n} [M]_{i,k}\underbrace{[N]_{k,j}}_{=0},$$

ce qui montre $MN \in P_q$*, et conclut.*

(b) Calculer $\dim P_q$.

Donnons deux démonstrations.

- *La famille* $\left(E_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \setminus ([\![q+1,n]\!]\times[\![1,q]\!])}$ *est libre (en tant que sous-famille de la base canonique) et clairement génératrice de* P_q*, donc*

$$P_q = \left| [\![1,n]\!]^2 \setminus ([\![q+1,n]\!] \times [\![1,q]\!]) \right| = n^2 - q(n-q) = n^2 - qn + q^2.$$

- *L'application linéaire* $\Theta : M_n(K) \to M_{n-q,q}(K)$ *est clairement surjective, un antécédent de* $C \in M_{n-q,q}(K)$ *étant par exemple* $\left(\begin{array}{c|c} 0_{q,q} & 0_{q,n-q} \\ \hline C & 0_{n-q,n-q} \end{array}\right)$.
On en déduit que son rang est $\dim M_{n-q,q}(K) = q(n-q)$*, puis, d'après la formule du rang,*

$$\dim P_q = \dim \ker \Theta = \dim M_n(K) - \operatorname{rg} \Theta = n^2 - q(n-q) = n^2 - qn + q^2.$$

4. Soit $A \subseteq M_n(K)$ une sous-algèbre de $M_n(K)$. Montrer que l'ensemble $A^T = \left\{ M^T \,\middle|\, M \in A \right\}$ est une sous-algèbre de $M_n(K)$.

- A^T *est l'image du sous-espace vectoriel* A *par l'endomorphisme de transposition* $M \mapsto M^T$*, donc c'est un sous-espace vectoriel de* $M_n(K)$.
- $I_n \in A$*, donc* $I_n = I_n^T \in A^T$.
- *Soit* $M', N' \in A^T$. *On peut donc trouver* $M, N \in A$ *tels que* $M' = M^T$ *et* $N' = N^T$. *Il vient alors* $NM \in A$*, puis* $M'N' = (NM)^T \in A^T$.

Matrices de rang un

5. Montrer qu'une matrice $M \in M_n(K)$ est de rang 1 si et seulement s'il existe $x, y \in K^n$ non nuls tels que $M = x\,y^T$.

- *Si* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$*, on a* $x\,y^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_1y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix}$.

  Les colonnes d'une telle matrice sont manifestement colinéaires, ce qui prouve $\mathrm{rg}(x\,y^T) \leqslant 1$*. En outre, si* x *et* y *sont non nuls, on peut trouver deux indices* $i, j \in [\![1, n]\!]$ *tels que* $x_i, y_j \neq 0$*, donc le coefficient* (i, j) *de* $x\,y^T$ *est non nul et* $\mathrm{rg}(x\,y^T) = 1$*.*

- *Réciproquement, soit* $M \in M_n(K)$ *une matrice de rang* 1*. Ses colonnes sont toutes des multiples d'un vecteur* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *: on peut donc trouver des scalaires* $y_1, \dots, y_n \in K$ *tels que l'on ait, pour tout* $j \in [\![1, p]\!]$, $C_j(M) = y_j \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$*. En posant* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$*, on a donc* $M = x\,y^T$*.*

  La matrice M *étant non nulle, on a nécessairement* $x, y \neq 0_{K^n}$*.*

Orthogonalité

- Pour tous $x, y \in K^n$, on définit $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \in K$.
- Étant donné une partie X de K^n, on note $X^\perp = \{y \in K^n \mid \forall x \in X, \langle x|y\rangle = 0\}$.
- Pour tout $x \in K^n$, on note $\varphi_x : \begin{cases} K^n & \to & K \\ y & \mapsto & \langle x|y\rangle \end{cases}$.
- Enfin, on dit que deux sous-espaces vectoriels V et W de K^n sont *orthogonaux* si

$$\forall x \in V, \forall y \in W, \langle x|y\rangle = 0.$$

6. Soit $x \in K^n$. Montrer que φ_x est une application linéaire.

   Soit $y, z \in K^n$ *et* $\lambda \in K$*. On a, notamment par linéarité de la somme,*

$$\varphi_x(y + \lambda z) = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i + \lambda z_i) = \sum_{k=1} x_iy_i + \lambda \sum_{k=1}^{n} x_iz_i = \varphi_x(y) + \lambda\varphi_x(z),$$

   ce qui conclut.

7. Déterminer $\{0_{K^n}\}^\perp$ et $(K^n)^\perp$.

- *On a* $\forall y \in K^n, \langle 0_{K^n}|y\rangle = 0$*, donc*

$$\{0_{K^n}\}^\perp = \{y \in K^n \mid \langle x|y\rangle = 0\} = K^n.$$

- *L'inclusion* $\{0_{K^n}\} \subseteq (K^n)^\perp$ *est claire. Montrons l'inclusion réciproque. Soit* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in (K^n)^\perp$*.*

  On a notamment, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \langle x|e_i\rangle = 0$*, ce qui montre* $x = 0_{K^n}$*, et conclut.*

8. Soit V un sous-espace vectoriel de K^n. Montrer que $V^\perp$ est un sous-espace vectoriel de K^n.

Il suffit de remarquer que

$$V^\perp = \bigcap_{x \in V} \ker(\varphi_x),$$

et d'utiliser le fait qu'une intersection de sous-espaces vectoriels de K^n *est encore un sous-espace vectoriel de* K^n.
(On peut le dire de manière plus pédestre.)

9. Soit V un sous-espace vectoriel de K^n et $\Phi : \begin{cases} K^n & \to & V^* \\ x & \mapsto & (\varphi_x)_{|V} \end{cases}$.

   (a) Montrer que Φ est une application linéaire.

   Remarquons déjà que Φ *est bien définie car, pour tout* $x \in K^n$, φ_x *est linéaire (et sa restriction* $(\varphi_x)_{|V}$ *est donc bien un élément de* V^*.
   Soit maintenant $x, z \in K^n$ *et* $\lambda \in K$.
   On va montrer l'égalité $\Phi(x + \lambda z) = \Phi(x) + \lambda\Phi(z)$, *c'est-à-dire* $\big(\varphi_{x+\lambda z}\big)_{|V} = \big(\varphi_x\big)_{|V} + \lambda\big(\varphi_z\big)_{|V}$ *qui est une égalité de fonctions* $V \to K$.
   Soit $y \in V$. *Notons que, la formule définissant* $\langle x|y\rangle$ *est symétrique, si bien que l'application* $x \mapsto \langle x|y\rangle$ *est tout aussi linéaire que* φ_x *(d'ailleurs, il s'agit de* φ_y*). On a alors*

$$\begin{aligned}\big(\varphi_{x+\lambda z}\big)_{|V}(y) &= \varphi_{x+\lambda z}(y)\\ &= \langle x + \lambda z|y\rangle\\ &= \langle x|y\rangle + \lambda \langle z|y\rangle\\ &= \varphi_x(y) + \lambda\varphi_z(y)\\ &= \big(\varphi_x\big)_{|V}(y) + \lambda\big(\varphi_z\big)_{|V}(y),\end{aligned}$$

   ce qui conclut.

   (b) Montrer $\ker \Phi = V^\perp$.

   On a

$$\begin{aligned}\ker \Phi &= \Big\{x \in K^n \,\Big|\, \big(\varphi_x\big)_{|V} = 0_{V^*}\Big\}\\ &= \{x \in K^n \,|\, \forall y \in V, \varphi_x(y) = 0\}\\ &= \{x \in K^n \,|\, \forall y \in V, \langle x|y\rangle = 0\}\\ &= V^\perp.\end{aligned}$$

   (c) Montrer que Φ est surjective.

   On peut trouver un supplémentaire S *de* V *dans* K^n.
   D'après la propriété universelle des espaces supplémentaires, on peut alors trouver une (unique) application linéaire $\widetilde{f} : V \to K$ *telle que* $(\widetilde{f})_{|V} = f$ *et* $(\widetilde{f})_{|S} = 0_{S^*}$.
   Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, *posons* $x_i = \widetilde{f}(e_i)$
   Cela définit ainsi un élément $x \in K^n$ *et, pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, *on a*

$$\varphi_x(e_i) = \langle x|e_i\rangle = x_i = \widetilde{f}(e_i).$$

   Cela montre que φ_x *et* $\widetilde{f}$ *coïncident sur la base canonique, ce qui entraîne que* $\varphi_x = \widetilde{f}$ *par prolongement des identités.*
   In fine, $f = (\widetilde{f})_{|V} = (\varphi_x)_{|V} = \Phi(x)$, *ce qui conclut.*

(d) En déduire que $\dim V^{\perp} = n - \dim V$.

Comme Φ est surjective, son rang est $\dim V^* = \dim V$. D'après la formule du rang,

$$\begin{aligned}\dim V^{\perp} &= \dim \ker \Phi \\ &= \dim K^n - \operatorname{rg} \Phi \\ &= n - \dim V.\end{aligned}$$

10. Soit V, W deux sous-espaces vectoriels de K^n orthogonaux.
Déduire de ce qui précède que $\dim V + \dim W \leqslant n$.

Comme V et W sont orthogonaux, on a $W \subseteq V^{\perp}$, d'où $\dim W \leqslant \dim V^{\perp} = n - \dim V$, ce qui équivaut à l'inégalité demandée.

Partie II. Théorème de Schur (1905).

- Dans toute cette partie, on appelle *espace de Schur d'ordre* n tout sous-espace vectoriel $S \subseteq T_n(K)$ tel que $\forall M, N \in S, MN = NM$.
- On note $s_n \in \mathbb{N}$ la dimension maximale d'un espace de Schur d'ordre n. Le but de cette partie est de calculer s_n, ce qui constitue un résultat dû à Issai Schur (1875-1941). On suit une démonstration de 1998, due à Maryam Mirzâkhâni (1977-2017, médaillée Fields en 2014).

11. Déterminer s_1 et s_2 et montrer que si $n \geqslant 2$, alors $n \leqslant s_n \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2} - 1$.

- $M_1(K) = T_1(K)$ *est commutative, donc* $s_1 = \dim T_1(K) = 1$.
- $E_{1,2}E_{2,2} = E_{1,2}$ *et* $E_{2,2}E_{1,2} = 0$ *donc* $T_2(K)$ *n'est pas commutatif. Cela montre (par inclusion et égalité des dimensions) que tout espace de Schur d'ordre 2 est de dimension < 3, et donc $s_2 < 3$.*
  Par ailleurs, on vérifie immédiatement que $D_2(K)$ est un espace de Schur d'ordre 2, ce qui donne $2 \leqslant s_2$.
  In fine, $s_2 = 2$.
- *Soit $n \geqslant 2$. L'encadrement demandé se démontre essentiellement avec les arguments que l'on vient de donner :*
  - $D_n(K)$ *est un espace de Schur d'ordre n, donc* $s_n \geqslant \dim D_n(K) = n$.
  - *Le même calcul que plus haut montre que $T_n(K)$ n'est pas commutatif, donc tout espace de Schur d'ordre n a une dimension* $< \dim T_n(K) = \dfrac{n(n+1)}{2}$*, ce qui équivaut à l'inégalité large demandée.*

12. Dans toute cette question, qui constitue le cœur de la démonstration, on fixe S, un espace de Schur d'ordre $n+1$. On définit alors

$$H = S \cap \operatorname{Vect}\left(E_{1,1}^{(n+1)}, E_{1,2}^{(n+1)}, \dots, E_{1,n+1}^{(n+1)}\right), \qquad V = S \cap \operatorname{Vect}\left(E_{1,n+1}^{(n+1)}, E_{2,n+1}^{(n+1)}, \dots, E_{n+1,n+1}^{(n+1)}\right)$$

et l'application (clairement linéaire) $\Omega : \begin{cases} T_{n+1}(K) \to & T_n(K) \\ \quad M \quad \mapsto & \left([M]_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \end{cases}$.

(a) Montrer que l'image directe $\Omega[S]$ est un espace de Schur d'ordre n.

- *Remarquons déjà que Ω est bien définie car le « bloc nord-ouest » d'une matrice triangulaire supérieure est encore triangulaire supérieur.*

- *Image directe d'un sous-espace vectoriel de* $T_{n+1}(K)$ *par l'application linéaire* Ω, $\Omega[S]$ *est déjà un sous-espace vectoriel de* $T_n(K)$.
- *Avant de montrer la propriété de commutation, montrons que* Ω *« respecte » les produits, ce qui montre au passage qu'il s'agit d'un morphisme d'algèbres.*
  Soit $M, N \in T_{n+1}(K)$. *Soit* $i, j \in [\![1, n]\!]$. *On a*

  $$[\Omega(MN)]_{i,j} = [MN]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [M]_{i,k}[N]_{k,j} + [M]_{i,n+1} \underbrace{[N]_{n+1,j}}_{=0} = \sum_{k=1}^{n} [\Omega(M)]_{i,k}[\Omega(N)]_{k,j},$$

  ce qui conclut.
- *Pour tout* $M', N' \in \Omega[S]$, *on va donc trouver* $M, N \in S$ *tels que* $M' = \Omega(M)$ *et* $N' = \Omega(N)$. *Comme* S *est un espace de Schur, on a* $MN = NM$, *et le fait que* Ω *soit un morphisme d'algèbres montre que*

  $$M'N' = \Omega(MN) = \Omega(NM) = N'M',$$

  ce qui conclut.

(b) En déduire que $\dim V \geqslant \dim S - s_n$.

L'application Ω *se restreint en une application* $\Psi = \Omega_{|S} : S \to T_n(K)$, *d'image* $\operatorname{im}\Psi = \Omega[S]$ *et de noyau*

$$\ker \Psi = S \cap \Omega = S \cap \operatorname{Vect}\left(E^{(n+1)}_{1,n+1}, E^{(n+1)}_{2,n+1}, \dots, E^{(n+1)}_{n+1,n+1}\right) = V.$$

D'après la formule du rang, on a

$$\dim V = \dim S - \operatorname{rg}\Psi = S - \dim \Omega[S] \geqslant S - s_n,$$

car $\Omega[S]$ *est un espace de Schur d'ordre* n, *donc* $\dim \Omega[S] \leqslant s_n$.

(c) Montrer que $\dim H \geqslant \dim S - s_n$.

On procède exactement de même, avec l'application $\mho : \begin{cases} T_{n+1}(K) \to & T_n(K) \\ M \mapsto & \left([M_{i+1,j+1}]\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \end{cases}$.
En effet, la restriction de $\mho$ *à* S *sera une application linéaire de noyau* H, *et dont l'image* $\mho[S]$ *est un espace de Schur d'ordre* n.

(d) Montrer que $\forall M \in H, \forall N \in V, MN = 0$.

Soit $M \in H$ *et* $N \in V$.
Par définition, $M = \sum_{k=1}^{n+1} [M]_{1,k}E_{1,k}$ *et* $N = \sum_{i=1}^{n+1} [N]_{i,n+1}E_{i,n+1}$.
Par bilinéarité du produit matriciel, $NM = \sum_{1\leqslant i,k\leqslant n} [N]_{i,n+1}[M]_{1,k}E_{i,n+1}E_{1,k} = 0$ *car* $n + 1 \neq 1$.
Or $MN = NM$ *car* N *et* M *appartiennent à un même espace de Schur, ce qui donne* $MN = 0$.

(e) Déduire de ce qui précède que $2\,(s_{n+1} - s_n) \leqslant n + 1$.

Posons $\alpha : \begin{cases} K^{n+1} \to & T_n(K) \\ x \mapsto & \sum_{j=1}^{n+1} x_j\, E_{1,j} \end{cases}$ *et* $\beta : \begin{cases} K^{n+1} \to & T_n(K) \\ y \mapsto & \sum_{k=1}^{n+1} y_k\, E_{k,n+1} \end{cases}$.
Il s'agit de deux applications linéaires et injectives (par liberté d'une sous-famille de la base canonique), dont les images respectives sont $\operatorname{Vect}(E_{1,1}, \dots, E_{1,n+1})$ *et* $\operatorname{Vect}(E_{1,n+1}, \dots, E_{n+1,n+1})$ *(qui contiennent donc* H *et* V*).*

En particulier, α et β induisent des isomorphismes $\alpha^{-1}[H] \to H$ et $\beta^{-1}[V] \to V$.
Pour tous $x, y \in K^n$, un calcul direct montre que $\alpha(x)\beta(y) = \langle x|y\rangle\ E_{1,n+1}$.
La question précédente montre donc que les sous-espaces vectoriels $\alpha^{-1}[H]$ et $\beta^{-1}[V]$ sont orthogonaux. D'après le résultat montré dans les préliminaires, cela entraîne

$$\dim H + \dim V = \dim \alpha^{-1}[H] + \dim \beta^{-1}[V] \leqslant n+1.$$

Grâce aux questions précédentes, on en déduit $2(\dim S - s_n) \leqslant n+1$.
Comme l'espace de Schur utilisé dans la démonstration est quelconque, on peut en choisir un de dimension maximale, et obtenir $2(s_{n+1} - s_n) \leqslant n+1$.

13. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $s_{2n+1} \leqslant n^2+n+1$ et $s_{2n} \leqslant n^2+1$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} 2(s_{2p} - s_{2p-1}) &\leqslant 2p && \textit{donc} \quad s_{2p} - s_{2p-1} \leqslant p \\ 2(s_{2p+1} - s_{2p}) &\leqslant 2p+1 && \textit{donc} \quad s_{2p+1} - s_{2p} \leqslant p, \end{aligned}$$

d'où il vient $s_{2p+1} - s_{2p-1} \leqslant 2p$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage, on a ainsi

$$s_{2n+1} = \sum_{p=1}^{n} (s_{2p+1} - s_{2p-1}) + s_1 \leqslant 2\sum_{p=1}^{n} p + 1 = n(n+1)+1 = n^2+n+1.$$

Notons que cette formule est également valable pour l'entier 0. On peut donc l'appliquer à $n-1$ et obtenir

$$s_{2n} \leqslant (s_{2n} - s_{2n-1}) + s_{2n-1} \leqslant n + \big((n-1)^2 + (n-1) + 1\big) = n^2+1.$$

14. À l'aide de $S = \operatorname{Vect}\left(\{I_{2n}\} \cup \left\{E_{i,j}^{(2n)} \,\middle|\, (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![n+1,2n]\!]\right\}\right)$, montrer que $s_{2n} = n^2+1$.

On a

$$S = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n & A \\ \hline 0_{n,n} & \lambda I_n \end{array}\right) \,\middle|\, \lambda \in K, A \in M_n(K) \right\},$$

et on voit facilement que S est un sous-espace vectoriel de $T_{2n}(K)$, de dimension $1+n^2$.
Vérifions que les éléments de S commutent.
Soit $M, N \in S$.
Il existe $(\lambda,\mu) \in K^2$ et $(A,B) \in M_n(K)^2$ tel que $M = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n & A \\ \hline 0 & \lambda I_n \end{array}\right)$ et $N = \left(\begin{array}{c|c} \mu I_n & B \\ \hline 0 & \mu I_n \end{array}\right)$.
Un calcul par blocs donne $MN = \left(\begin{array}{c|c} \lambda\mu I_n & \lambda B + \mu A \\ \hline 0 & \lambda\mu I_n \end{array}\right)$ et $NM = \left(\begin{array}{c|c} \mu\lambda I_n & \mu A + \lambda B \\ \hline 0 & \mu\lambda I_n \end{array}\right) = MN$.
S est donc un espace de Schur d'ordre $2n$ et de dimension n^2+1, ce qui montre l'inégalité manquante $s_{2n} \geqslant n^2+1$.

15. Montrer que $s_{2n+1} = n^2+n+1$.

On pose cette fois

$$S = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n & A \\ \hline 0_{n+1,n} & \lambda I_{n+1} \end{array}\right), \lambda \in K, A \in M_{n,n+1}(K) \right\}.$$

On vérifie que S est un espace de Schur d'ordre $2n+1$ et de dimension $1+n(n+1) = n^2+n+1$.
On obtient ainsi l'inégalité manquante $s_{2n+1} \geqslant n^2+n+1$.

16. Soit $n \geqslant 1$ et S un espace de Schur d'ordre n et de dimension s_n.
Montrer que S est une sous-algèbre de $M_n(K)$.

L'idée est de montrer que la sous-algèbre S^+ engendrée par S et elle-même un espace de Schur : on a donc $S \subseteq S^+$ et $s_n = \dim S \leqslant \dim S^+ \leqslant s_n$, ce qui montre $\dim S^+ = \dim S$, puis $S^+ = S$ par inclusion et égalité des dimensions.
*Il reste à faire marcher cette stratégie. On peut le faire de manière élémentaire (l'algèbre engendrée par S est le sous-espace vectoriel engendré par tous les produits $A_1 \cdots A_r$, où $r \in \mathbb{N}$ et $A_1, \dots, A_r \in S$, ce qui contient l'identité quand $r = 0$) mais il est plus intéressant d'utiliser un peu d'*abstract nonsense*.*

1. *On vérifie facilement que l'intersection d'une famille non vide quelconque de sous-algèbres de $M_n(K)$ est encore une sous-algèbre de $M_n(K)$.*
2. *On note $\mathscr{A}_S$ l'ensemble de toutes les sous-algèbres de $M_n(K)$ contenant S (qui est non vide, car $M_n(K) \in \mathscr{A}_S$), puis on définit $S^+ = \displaystyle\bigcap_{A \in \mathscr{A}_S} A$, qui est donc une sous-algèbre de $M_n(K)$ d'après le point précédent.*
3. *Puisque S est inclus dans tous les éléments de $\mathscr{A}_S$, il est inclus dans leur intersection S^+.*
4. *Comme S est un espace de Schur, $S \subseteq T_n(K)$, donc $T_n(K) \in \mathscr{A}_S$, et $S^+ \subseteq T_n(K)$.*
5. *Reste à voir que l'algèbre S^+ est bien commutative.*
On va utiliser la remarque (facile à vérifier) selon laquelle, si $X \subseteq M_n(K)$ est une partie quelconque, son centralisateur $C(X) = \{M \in M_n(K) \mid \forall N \in X, MN = NM\}$ *est une sous-algèbre de $M_n(K)$.*
   - *On commence par vérifier que tout élément de S commute à tout élément de S^+ : soit $M \in S$.*
   Comme S est un espace de Schur, on a $S \subseteq C(S)$.
   Cela montre $C(S) \in \mathscr{A}_S$, et donc $S^+ \subseteq C(S)$, ce qui signifie exactement la propriété de commutation annoncée.
   - *Soit $N \in S^+$. D'après le point précédent, N commute à tout élément de S, c'est-à-dire que $S \subseteq C(\{N\})$.*
   Cela montre $C(\{N\}) \in \mathscr{A}_S$, et donc $S^+ \subseteq C(\{N\})$, ce qui montre que N commute à tout élément de S^+.

On a ainsi montré que S^+ était à la fois une sous-algèbre de $M_n(K)$ et un espace de Schur contenant S, ce qui fait marcher notre stratégie.

Partie III. Théorème de Burnside (1905).

On définit des notions relatives à une sous-algèbre A de $M_n(K)$.
- Un sous-espace vectoriel V de K^n est dit *stable sous* A si $\forall M \in A, \forall x \in V, Mx \in V$.
- On dit que A est *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels stables sous A sont $\{0_{K^n}\}$ et K^n.

17. Soit $n \geqslant 2$. On rappelle qu'on a défini à la question 3 une sous-algèbre P_q de $M_n(K)$, pour tout entier $q \in [\![1, n-1]\!]$.
    (a) Montrer que P_q n'est pas irréductible.

    On vérifie facilement que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_q)$ *est stable sous* P_q.

    (b) Soit A une sous-algèbre de $M_n(K)$ non irréductible.
    Montrer qu'il existe $q \in [\![1, n-1]\!]$ et $Q \in GL_n(K)$ telle que

$$\left\{Q^{-1}MQ \,\middle|\, M \in A\right\} \subseteq P_q.$$

Soit V *un sous-espace vectoriel stable sous* A *qui n'est ni* $\{0_{K^n}\}$*, ni* K^n*. On peut noter* $q = \dim V$*, qui sera donc un élément de* $[\![0, n-1]\!]$*. Soit* $\mathscr{B} = (f_1, \dots, f_q, f_{q+1}, \dots, f_n)$ *une base de* K^n *adaptée à ce sous-espace vectoriel (on notera* $\mathscr{C}$ *la base canonique).*
Soit $M \in A$*, puis* $u \in \mathscr{L}(K^n)$ *l'endomorphisme canoniquement associé à* M*.*
Pour tout $j \in [\![1, q]\!]$*, on a* $u(f_j) \in V = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_q)$*, ce qui montre que*

$$\forall i \in [\![q+1, n]\!], \left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\right]_{i,j} = 0.$$

Autrement dit, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in P_q$*.*
Or, en notant Q *la matrice de passage* $P_{\mathscr{C} \to \mathscr{B}} \in GL_n(K)$*, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = Q^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) Q = Q^{-1} M Q.$$

On a donc montré $\forall M \in A, Q^{-1}MQ \in P_q$*, ce qui conclut.*

18. Montrer que si $V \subseteq K^n$ est un sous-espace vectoriel stable sous A, alors $V^\perp$ est stable sous A^T.

Soit $y \in V^\perp$ *et* $M \in A$*. Montrons que* $M^T y \in V^\perp$*. Soit* $x \in V$*. On a* $\left\langle x \middle| M^T y \right\rangle = \langle Mx | y \rangle$*. En effet,*

$$\begin{aligned}
\left\langle x \middle| M^T y \right\rangle &= \sum_{k=1}^{n} x_k (M^T y)_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{\ell=1}^{n} [M^T]_{k,\ell}\, y_\ell \\
&= \sum_{(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2} x_k\, [M]_{\ell,k}\, y_\ell, \\
\textit{et} \qquad \langle Mx | y \rangle &= \sum_{i=1}^{n} (Mx)_i y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} [M]_{i,j}\, x_j \right) y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_j\, [M]_{i,j}\, x_j,
\end{aligned}$$

et ces deux quantités sont bien égales.
Cela conclut : en effet, V *étant stable par* A*, on a* $Mx \in V$ *donc* $\left\langle x \middle| M^T y \right\rangle = \langle Mx | y \rangle = 0$*.*
Cela étant vrai pour tout $x \in V$*, on a bien* $M^T y \in V^\perp$*.*

19. Montrer que si A est irréductible, alors A^T aussi.

Supposons A *irréductible. Soit* V *un sous-espace stable sous* A^T*. D'après la question précédente,* $V^\perp$ *est stable sous* $\left(A^T\right)^T = A$*. Cette dernière étant irréductible, on a* $V^\perp = \{0\}$*, ou* $V^\perp = K^n$*, ce que l'on peut réécrire* $\dim V^\perp \in \{0, n\}$*.*
D'après la question ***7.****, on en déduit que* $\dim V \in \{0, n\}$*, ce qui prouve* $V = \{0\}$ *ou* $V = K^n$*, et conclut la preuve.*

20. Montrer que A est irréductible si et seulement si

$$\forall x \in K^n \setminus \{0\}, \forall y \in K^n, \exists M \in A : Mx = y.$$

- *Supposons* A *irréductible et soit* $x, y \in K^n$*, avec* $x \neq 0$*. Considérons l'ensemble* $F = \{Mx \mid M \in A\}$*. On vérifie directement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de* K^n*. Montrons qu'il est stable sous* A*.*

  Soit $y \in F$ *et* $N \in A$*. Par définition de* F*, on peut trouver* $M \in A$ *tel que* $y = Mx$*. On a alors* $Ny = NMx \in F$*, car* $NM \in A$*. Comme* A *est irréductible, on a* $F = \{0\}$ *ou* $F = K^n$*. Le premier cas est impossible, car* F *contient le vecteur non nul* x*. On a donc* $F = K^n$*.*

  En particulier, $y \in F$*, ce qui montre qu'il existe* $M \in A$ *tel que* $Mx = y$*.*

- *Réciproquement, supposons l'assertion* $\forall x \in K^n \setminus \{0\}, \forall y \in K^n, \exists M \in A : Mx = y$ *vraie. Soit* $V \subseteq K^n$ *un sous-espace vectoriel stable, supposé distinct de* $\{0\}$*. On peut donc trouver un vecteur* $x \in V$ *non nul.*

  Soit $y \in K^n$*. D'après l'hypothèse, on peut trouver* $M \in A$ *tel que* $Mx = y$*. Le sous-espace* V *étant stable, on a* $y \in V$*. Cela démontre que* $V = K^n$*.*

  Ainsi, les seuls sous-espaces stables sous A *sont* $\{0\}$ *et* K^n*, ce qui prouve l'irréductibilité.*

21. Supposons A irréductible.

    (a) Montrer que si A contient une matrice M_0 de rang 1, toutes les matrices de rang 1 de $M_n(K)$ s'écrivent sous la forme UM_0V, avec $U, V \in A$.

    D'après les préliminaires, on sait pouvoir trouver deux colonnes $x_0, y_0 \in K^n$ *non nulles telles que* $M_0 = x_0\, y_0^T$*. Soit* M *une matrice de rang* 1*, que l'on écrit pareillement* $x\, y^T$*, avec* $x, y \in K^n$*.*

    Comme A *est irréductible, on peut trouver une matrice* $U \in A$ *telle que* $Ux_0 = x$*.*

    De même, l'algèbre A^T *est irréductible, et on peut trouver une matrice* $V \in A$ *telle que* $V^T y_0 = y$*, ce que l'on peut encore écrire* $y_0^T V = y^T$*. On a alors* $UM_0V = Ux_0\, {}^t y_0 V = x\, y^T = M$*, ce qui conclut.*

    (b) En déduire que si A contient une matrice de rang 1, alors $A = M_n(K)$.

    Supposons que A *contienne une matrice* M_0 *de rang* 1*. D'après la question précédente, toutes les matrices de rang* 1 *s'écrivent sous la forme* UM_0V *avec* $U, V \in A$*, donc elles sont elles-mêmes des éléments de* A*.*

    La sous-algèbre A *contient donc en particulier toutes les matrices élémentaires* $E_{i,j}^{(n)}$*. Puisque celles-ci forment une partie génératrice de* $M_n(K)$ *et que* A *est un sous-espace vectoriel de* $M_n(K)$*, on a* $A = M_n(K)$*.*

Dans la suite du problème, $K = \mathbb{C}$ et on considère une sous-algèbre irréductible A de $M_n(\mathbb{C})$.
On va montrer que $A = M_n(\mathbb{C})$, ce qui est un théorème dû à William Burnside (1852-1927).

- On admet que si E est un espace vectoriel de dimension finie non trivial sur le corps des complexes et que $u \in \mathscr{L}(E)$, alors il existe $\lambda \in K$ tel que $u - \lambda\, \mathrm{id}_E$ ne soit pas un automorphisme.

22. (a) Montrer que si $T \in A$ vérifie $\mathrm{rg}\, T \geqslant 2$, on peut trouver $S \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que

    $$1 \leqslant \mathrm{rg}\,((TS - \lambda I_n)T) < \mathrm{rg}\, T.$$

    Cette question est franchement vache.

    Remarquons d'abord que quel que soit $S \in A$*, la matrice* TST *stabilise* $\mathrm{im}\, T$*, au sens où* $\forall x \in \mathrm{im}\, T$*,* $TSx \in \mathrm{im}\, T$*. On peut donc considérer l'endomorphisme* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{im}\, T)$ *défini par* $x \mapsto TSTx$*. Le sous-espace vectoriel* $\mathrm{im}\, T$ *n'étant pas trivial, on peut trouver un nombre complexe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $u - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathrm{im}\, T}$ *ne soit pas inversible. Il n'est en particulier pas surjectif.*

    Cela entraîne que l'image de $(TS - \lambda I_n)T$ *est strictement incluse dans* $\mathrm{im}\, T$ *: en effet,*

    $$\mathrm{im}\,((TS - \lambda I_n)T) = (u - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathrm{im}\, T})\,[\mathrm{im}\, T] = \mathrm{im}\,(u - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathrm{im}\, T}) \subsetneq \mathrm{im}\, T.$$

    Cela prouve que $\mathrm{rg}\,((TS - \lambda I_n)T) < \mathrm{rg}\, T$*.*

On a donc montré que quel que soit $S \in A$*, il existait* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $\operatorname{rg}((TS - \lambda I_n)T) < \operatorname{rg} T$*. Il reste maintenant à voir que si l'on choisit convenablement* S*, la matrice* $(TS - \lambda I_n)T$ *est bien non nulle.*

Pour cela, nous allons utiliser l'hypothèse $\operatorname{rg} T \geqslant 2$ *: on peut donc trouver deux vecteurs* x *et* $y \in \mathbb{C}^n$ *tels que la famille* (Tx, Ty) *soit libre. Puisque* A *est irréductible, on peut choisir* $S \in A$ *de telle sorte que* $STx = Ty$*. On a alors*

$$(TS - \lambda I_n)Tx = TSTx - \lambda Tx = Ty - \lambda Tx \neq 0_{K^n},$$

ce qui conclut la preuve.

(b) En déduire que la seule sous-algèbre irréductible de $M_n(\mathbb{C})$ est $M_n(\mathbb{C})$ elle-même.

Soit A *une sous-algèbre irréductible de* $M_n(\mathbb{C})$*. On va montrer qu'elle contient une matrice de rang* 1*. Considérons* $\{\operatorname{rg} M \,|\, M \in A \setminus \{0\}\}$ *: il s'agit d'un ensemble d'entiers naturels non nuls, non vide (il contient* $\operatorname{rg} I_n = n$*), donc il possède un élément minimal* $r \in \mathbb{N}^*$*.*

La question précédente montre que $r = 1$ *: dans le cas contraire, si* $T \in A$ *était une matrice de rang* r*, la matrice* $(TS - \lambda I_n)T \in A$ *construite à la question précédente aurait un rang appartenant à* $[\![1, r-1]\!]$*, ce qui contredirait la définition de* r*.*

La sous-algèbre A *contient donc une matrice de rang* 1*. D'après la question 21b,* $A = M_n(\mathbb{C})$*.*

23. Montrer que le théorème de Burnside est faux si l'on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.

Je vous laisse vérifier les détails, mais

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

est une sous-algèbre irréductible de $M_2(\mathbb{R})$*, qui n'est bien évidemment pas* $M_2(\mathbb{R})$*.*

24. **Application.** Soit A une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer $\dim A \in [\![1, n^2 - n + 1]\!] \cup \{n^2\}$.

Soit A *une sous-algèbre de* $M_n(\mathbb{C})$ *de dimension* $\neq n^2$*. D'après le théorème de Burnside,* A *n'est pas irréductible, donc on peut trouver* $Q \in GL_n(K)$ *tel que* $A' = \left\{ Q^{-1}MQ \,\middle|\, M \in A \right\} \subseteq P_q$*, d'après la question 3.*

Or, on vérifie facilement que l'application $M \mapsto Q^{-1}MQ$ *est un automorphisme de* $M_n(K)$*, ce qui montre que* A *et* A' *sont isomorphes (en tant qu'espaces vectoriels, mais c'est à vrai dire aussi vrai en tant qu'algèbres, même si on ne va pas l'utiliser). Ainsi,* $\dim A = \dim A' \leqslant \dim P_q = n^2 - q(n-q)$*.*

Une rapide étude de fonction montre que, pour n *fixé et* $q \in [\![1, n-1]\!]$*, on a* $q(n-q) \leqslant n - 1$*. Ainsi,*

$$\dim A \leqslant n^2 - q(n-q) \leqslant n^2 - n + 1.$$