Neuvième (et dernière) composition de mathématiques [corrigé]

Exercice.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} x \sin^2(x)\, dx$.

   ► *En linéarisant, on obtient* $\displaystyle\int_0^{2\pi} x \sin^2(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x\,(1-\cos(2x))\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x \cos(2x)\, dx.$

   ► *Par un calcul direct,* $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x\, dx = \frac{1}{4}\left[x^2\right]_{x=0}^{2\pi} = \pi^2.$

   ► *Par intégration par parties (les fonctions* $x \mapsto \sin(2x)/2$ *et* $x \mapsto x$ *étant de classe* C^1*) :*

$$\int_0^{2\pi} x \cos(2x)\, dx = \left[x\,\frac{\sin(2x)}{2}\right]_{x=0}^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2x) = 0 + \frac{1}{4}\left[\cos(2x)\right]_{x=0}^{2\pi} = 0.$$

   In fine, $\displaystyle\int_0^{2\pi} x \sin^2(x)\, dx = \pi^2$.

2. Donner un équivalent de la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

   On a, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt{t}\, dt = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_{t=0}^{1} = \frac{2}{3},$$

   d'après le théorème sur les sommes de Riemann, appliqué à la fonction continue $x \mapsto \sqrt{x}$ *sur* $[0,1]$.
   En ajoutant $\displaystyle\frac{1}{n\sqrt{n}}\sqrt{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *on obtient*

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3},$$

   d'où l'on déduit

$$\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n^{3/2}.$$

   Remarque. *Il était également possible de faire une comparaison série-intégrale.*

3. On considère l'équation différentielle $y' - \dfrac{4x+2}{2x^2+2x+1}y = 1$ (É), et on cherche ses solutions à valeurs réelles.

   (a) Résoudre l'équation différentielle homogène $y' - \dfrac{4x+2}{2x^2+2x+1}y = 0$.

   Une primitive de $x \mapsto \dfrac{4x+2}{2x^2+2x+1}$ *étant* $x \mapsto \ln(2x^2+2x+1)$, *on trouve pour espace des solutions de l'équation homogène*

$$\mathscr{S}_{\text{hom}} = \operatorname{Vect}\left(x \mapsto \exp\left(\ln(2x^2+2x+1)\right)\right) = \operatorname{Vect}\left(x \mapsto 2x^2+2x+1\right).$$

(b) Par la méthode de variation de la constante, trouver une solution à (É).

Soit $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable et* $f : x \mapsto \lambda(x)\,(2x^2+2x+1)$, *dérivable par opérations. On a la chaîne d'équivalences*

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (É)} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \frac{4x+2}{2x^2+2x+1} f(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)(2x^2+2x+1) + \underbrace{\lambda(x)(4x+2) - \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\lambda(x)(2x^2+2x+1)}_{=0\,*} = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \frac{1}{2x^2+2x+1}. \end{aligned}$$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+2x+1} = \dfrac{2}{(2x+1)^2+1}$ *étant* $\lambda : x \mapsto \arctan(2x+1)$, *on trouve que* $f : x \mapsto \arctan(2x+1)\,(2x^2+2x+1)$ *est solution de (É).*

(c) En déduire l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (É)

On obtient ainsi l'ensemble de solutions

$$\mathscr{S} = \left\{ x \mapsto \lambda\,(2x^2+2x+1) + \arctan(2x+1)\,(2x^2+2x+1) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Problème. Étude d'un endomorphisme de $C^0([0,1])$.

Dans ce problème, toutes les suites sont indexées par $\mathbb{N}^*$.

Partie I. Préliminaires.

1. Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ une série à termes positifs convergente telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 0$.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   La série étant à termes positifs, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \sum_{k=0}^{p} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0$, *donc* $\sum_{k=0}^{p} u_k = 0$.

   En appliquant cela à $p = n$ *et* $p = n-1$ *(ce qui donne un résultat correct, même si* $n = 1$, *car la somme est vide dans ce cas), on obtient* $u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_k = 0$.

2. Soit $q \in [0, 1[$.

   Montrer que la famille $(q^n)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est sommable et que $\sum_{n=1}^{+\infty} n\,q^n = \dfrac{q}{(1-q)^2}$.

   La famille étant à termes positifs, on peut mener directement le calcul dans $[0, +\infty]$. *On a alors*

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n\,q^n &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{k=1}^{n} q^n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{(k \leqslant n)} q^n \end{aligned}$$

*. Incroyable !

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{(k\leqslant n)} q^n \qquad \textit{(Fubini)}\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \sum_{n\geqslant k} q^n\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{q^k}{1-q}\\
&= \frac{q}{(1-q)^2} \qquad\qquad \textit{car } \sum_{k\in\mathbb{N}^*} q^k = \frac{q}{1-q}.
\end{aligned}
$$

3. (a) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall q \in [0,1[\,, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{q^k}{k} = -\ln(1-q) - \int_0^q \frac{(q-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\,dt$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *La fonction* $u : q \mapsto -\ln(1-q)$ *est une fonction lisse sur l'intervalle* $[0,1[$, *donc* a fortiori *de classe* C^{n+1}.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, *on a* $u^{(k)} : q \mapsto \dfrac{(k-1)!}{(1-q)^k}$, *comme une récurrence assez immédiate le montre.*
   La formule de Taylor avec reste intégral donne alors, pour tout $q \in [0,1[$

$$
\begin{aligned}
u(q) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} q^k + \int_0^q \frac{(q-t)^n}{n!} u^{(n+1)}(t)\,dt\\
&= -\ln(1-0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(k-1)!}{(1-0)^k} q^k + \int_0^q \frac{(q-t)^n}{n!} \frac{n!}{(1-t)^{n+1}}\,dt\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{q^k}{k} + \int_0^q \frac{(q-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\,dt,
\end{aligned}
$$

   ce qui est équivalent à la formule demandée.

   (b) À l'aide du changement de variables $t = q\,u$, en déduire $\forall q \in [0,1[\,, \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k} = -\ln(1-q)$.

   Soit $q \in [0,1[$. *Le changement de variables indiqué montre*

$$
\int_0^q \frac{(q-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\,dt = q^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1-qu)^{n+1}}\,du.
$$

   Pour tout $u \in [0,1]$, *on a* $qu \leqslant u \leqslant 1$, *donc* $1 - qu \geqslant 1 - u \geqslant 0$, *donc* $0 \leqslant \dfrac{1-u}{1-qu} \leqslant 1$, *ce qui montre*

$$
\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1-qu)^{n+1}}\,du \leqslant \int_0^1 \underbrace{\frac{du}{1-qu}}_{\leqslant \frac{1}{1-q}} \leqslant \frac{1}{1-q} \qquad \textit{donc} \qquad q^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1-qu)^{n+1}}\,du = O(q^n)
$$

   et donc $q^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1-qu)^{n+1}}\,du \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{q^k}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(1-q)$, *ce qui conclut.*

4. **Question (plus ou moins) de cours.** Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions continues sur le segment $[0,1]$. On suppose que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Montrer que g est continue.

   Cf. cours d'intégration.

Partie II. L'opérateur T.

- Dans toute la suite du sujet, on note $E = C^0([0,1])$.
- Pour tout $f \in E$, on définit la fonction

$$T(f) : \begin{cases} [0,1] \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}. \end{cases}$$

  Pour simplifier, on notera souvent Tf la fonction $T(f)$, si bien que $\forall x \in [0,1], Tf(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit $e_p : x \mapsto x^p$, qui est un élément de E.

5. Soit $f \in E$. Justifier que la fonction Tf est bien définie, c'est-à-dire que, pour tout $x \in [0,1]$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{f(x^n)}{2^n}$ converge.

   Comme la fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, le théorème des bornes atteintes entraîne qu'elle est bornée et possède une norme uniforme $\|f\|_\infty$.
   Pour tout $x \in [0,1]$, on a $\left|\dfrac{f(x^n)}{2^n}\right| \leqslant \dfrac{\|f\|_\infty}{2^n} = O(2^{-n})$, donc la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{f(x^n)}{2^n}$ converge absolument, et elle converge donc.

6. Soit $f \in E$. Combien valent $Tf(0)$ et $Tf(1)$?

   Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0^n = 0$ et $1^n = 1$, on a

$$Tf(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(0)}{2^n} = f(0) \qquad \textit{et} \qquad Tf(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(1)}{2^n} = f(1).$$

7. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer la fonction $T(e_p)$.

   Soit $x \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned} T(e_p)(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^n)^p}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^p}{2}\right)^n \\ &\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^p/2}{1 - x^p/2} && \textit{(car } x^p/2 \in [0,1[\textit{)} \\ &= \frac{x^p}{2 - x^p}, \end{aligned}$$

   donc $T(e_p) : x \mapsto \dfrac{x^p}{2-x^p}$.

8. Montrer que T est une application linéaire $E \to \mathbb{R}^{[0,1]}$.

   Soit $f, g \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$T(f + \lambda g)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n) + \lambda g(x^n)}{2^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n} + \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(x^n)}{2^n} = \mathrm{T}f(x) + \lambda \mathrm{T}g(x),$$

par linéarité de la somme d'une série convergente.
Ainsi, $\mathrm{T}(f + \lambda g) = \mathrm{T}f + \lambda \mathrm{T}g$*, ce qui montre la linéarité de* T*.*

9. **Une condition suffisante de convergence uniforme.** Dans cette question, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on fixe une fonction bornée $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ et on suppose que la série $\sum_{n \geqslant 1} \|g_n\|_\infty$ converge.

   (a) Montrer que la fonction $G : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ est bien définie.

   Pour tout $x \in [0, 1]$ *et tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a* $\sum_{k=1}^{n} |g_k(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|g_k\|_\infty \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n\|_\infty$*, ce qui montre que la série* $\sum_{n \geqslant 1} g_n(x)$ *converge (absolument) et donc que* $G(x)$ *est bien définie.*

   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, on définit $G_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$. Montrer que la suite de fonctions $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers G.

   Pour tout $x \in [0, 1]$ *et tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a*

$$\begin{aligned} |G(x) - G_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x) \right| \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |g_k(x)| \quad \textit{(inégalité triangulaire, la série } \sum_{n \geqslant 1} g_n(x) \textit{ converge absolument)} \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|g_k\|_\infty. \end{aligned}$$

   Cela montre $\|G - G_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|g_k\|_\infty$*. Comme il s'agit du reste d'une série convergente, on a* $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|g_k\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$*, donc* $\|G - G_n\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$*, d'après le théorème des gendarmes.*

   Remarque. *On a montré qu'une série qui* converge normalement *converge uniformément.*

10. Montrer que, pour tout $f \in E$, la fonction $\mathrm{T}f$ est continue.

    Pour tout $n \geqslant 1$*, la fonction* $g_n : x \mapsto \frac{f(x^n)}{2^n}$ *vérifie clairement* $\|g_n\| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{2^n}$ *(il y a en fait égalité, mais peu importe), donc la série* $\sum_{n \geqslant 1} \|g_n\|_\infty$ *converge, par comparaison à une série exponentielle.*

    D'après la question précédente, la suite de fonctions $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x^k)}{2^k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *converge uniformément vers* $\mathrm{T}f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$*.*

    Puisque les fonctions composant la suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *sont continues, il en va de même de leur limite uniforme* $\mathrm{T}f$*, ce qui conclut.*

> On a donc montré que T induisait un endomorphisme de E (que l'on continuera à noter T).

Partie III. Fonctions continûment dérivables.

- Dans cette partie, on fixe $f \in C^1([0,1])$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n = f \circ e_n : x \mapsto f(x^n)$.

11. Montrer que la fonction $h : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(x)}{2^n}$ est bien définie et continue.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $f_n' : x \mapsto n\, x^{n-1}\, f'(x^n)$, *donc la fonction* f_n' *(continue et donc bornée) vérifie*

$$\|f_n'\|_\infty \leqslant n\, \|f'\|_\infty.$$

Puisque la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\, \frac{\|f'\|_\infty}{2^n}$ *converge d'après la question 2, on en déduit que* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\|f_n'\|_\infty}{2^n}$ *converge.*
La question 9a entraîne alors que $h(x)$ *est bien définie pour tout* $x \in [0,1]$, *puis la question 9b entraîne que la suite de fonctions (continues)* $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{2^k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformément vers* h, *qui hérite donc de leur continuité.*

On introduit maintenant $H : x \mapsto \displaystyle\int_0^x h(t)\, dt$.

12. On suppose dans cette question que $f = e_p$ pour un certain entier $p \in \mathbb{N}^*$.

(a) Expliciter h.

Ici, on a $f_n' : x \mapsto n\, x^{n-1}\, p\, x^{n(p-1)} = np\, x^{np-1}$.
Ainsi, en effectuant d'abord le calcul dans $[0, +\infty]$ *puisque tout est* $\geqslant 0$, *on a, pour tout* $x \in]0,1]$,

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} np\, \frac{x^{np-1}}{2^n} \\ &= \frac{p}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{x^p}{2}\right)^n \\ &= \frac{p}{x} \frac{x^p/2}{(1 - x^p/2)^2} && \textit{(question 2)} \\ &= 2p\, \frac{x^{p-1}}{(2 - x^p)^2}. \end{aligned}$$

On vérifie rapidement que cette formule est également vraie dans le cas $x = 0$, *en distinguant suivant que* $p = 1$ *ou* $p \geqslant 2$.

(b) Montrer que $\forall x \in [0,1], Tf(x) = Tf(0) + H(x)$.

Pour tout $x \in [0,1]$, *on a*

$$\begin{aligned} H(x) &= 2 \int_0^x \frac{p\, t^{p-1}\, dt}{(2 - t^p)^2} \\ &= 2 \int_0^{x^p} \frac{du}{(2-u)^2} && \begin{bmatrix} u = t^p \\ du = p\, t^{p-1}\, dt \end{bmatrix} \\ &= 2 \left[\frac{1}{2-u}\right]_{u=0}^{x^p} \\ &= \frac{2}{2 - x^p} - 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{x^p}{2 - x^p}.$$

En comparant ce résultat et celui de la question 7, on obtient le résultat demandé, après avoir remarqué que $Tf(0) = f(0) = 0$.

13. On revient au cas général. Montrer $\forall x \in [0,1], Tf(x) = Tf(0) + H(x)$.

    Soit $x \in [0,1]$.

    Pour tout $n \geqslant 1$*, on définit* $h_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{2^k}$. *On a vu à la question 11 que la suite de fonctions* $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *converge uniformément vers* h *sur* $[0,1]$. A fortiori, *la restriction à* $[0,x]$ *de cette suite de fonctions converge uniformément vers* $h_{|[0,x]}$.

    On en déduit que $\int_0^x h_n(t)\,dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^x h(t)\,dt = H(x)$*, par contrôle uniforme de l'intégrale.*

    Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*,*

$$\begin{aligned} \int_0^x h_n(t)\,dt &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \int_0^x f_k'(t)\,dt && \textit{(linéarité de l'intégrale)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x) - f_k(0)}{2^k} && \textit{(théorème fondamental)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x^k)}{2^k} - f(0) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \\ &\xrightarrow[n \to +\infty]{} Tf(x) - \underbrace{f(0)}_{=Tf(0)}. \end{aligned}$$

    Par unicité de la limite, on en déduit $H(x) = Tf(x) - Tf(0)$*, ce qui équivaut à la formule demandée.*

14. Montrer que $Tf \in C^1([0,1])$.

    Puisque h *est continue, le théorème fondamental entraîne que* H *est de classe* C^1*, et on en conclut que* Tf *est de classe* C^1 *par opérations.*

Partie IV. Itération de l'opérateur T sur une fonction croissante.

- On fixe dans cette partie une fonction $f \in E$ croissante.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $T^n f = T^n(f) = (\underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ fois}})(f)$.

15. (a) Montrer que Tf est croissante.

    Soit $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a* $x^n \leqslant y^n$*, puis* $f(x^n) \leqslant f(y^n)$ *et enfin* $\frac{f(x^n)}{2^n} \leqslant \frac{f(y^n)}{2^n}$.

    On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x^k)}{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{f(y^k)}{2^k}$ *puis, par passage à la limite dans les inégalités larges :*

$$Tf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(y^n)}{2^n} = Tf(y),$$

    ce qui conclut.

(b) Montrer que $\forall x \in [0,1], Tf(x) \leqslant f(x)$.

Soit $x \in [0,1]$. *On a, pour tout* $n \geqslant 1$, $x^n \leqslant x$, *donc, par croissance de* f,

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x^k)}{2^k}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} Tf(x)} \leqslant f(x) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$$

et on conclut par passage à la limite dans les inégalités larges.

16. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la suite $(T^n f(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

La question précédente et une récurrence immédiate montrent que la suite $(T^n f(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante. Par ailleurs, toujours par une récurrence immédiate, toutes les fonctions de la suite* $(T^n f)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont croissantes et* $\forall n \in \mathbb{N}^*, T^n f(0) = f(0)$, *d'où* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], T^n f(x) \geqslant T^n f(0) = f(0)$.
La suite $(T^n f(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est donc décroissante et minorée, et elle converge d'après le théorème de la limite monotone.*

On notera, pour tout $x \in [0,1]$, $\ell(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} T^n f(x)$, ce qui définit une fonction $\ell : [0,1] \to \mathbb{R}$.

17. (a) Que valent $\ell(0)$ et $\ell(1)$?

Une récurrence triviale montre que les suites $(T^n f(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(T^n f(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont constantes, de valeurs respectives* $f(0)$ *et* $f(1)$.
On en déduit $\ell(0) = f(0)$ *et* $\ell(1) = f(1)$.

(b) Montrer que ℓ est continue en 0.

Pour tout $x \in [0,1]$ *et tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *les questions précédentes ont montré que*

$$f(0) = T^n f(0) \leqslant T^n f(x) \leqslant f(x).$$

Par passage à la limite, on en déduit $\forall x \in [0,1], f(0) = \ell(0) \leqslant \ell(x) \leqslant f(x)$.
Comme la continuité de f *assure que* $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} f(0)$, *le théorème des gendarmes donne la convergence* $\ell(x) \xrightarrow[x\to0]{} f(0) = \ell(0)$, *c'est-à-dire la continuité de* ℓ *en* 0.

(c) Montrer que ℓ est croissante.

Conceptuellement, le point-clef est qu'une limite simple de fonctions croissantes est croissante. Soyons plus pédestres.
Soit $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$. *Par la croissance déjà observée de toutes les fonctions* $T^n f$, *on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \underbrace{T^n f(x)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell(x)} \leqslant \underbrace{T^n f(y)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell(y)},$$

donc $\ell(x) \leqslant \ell(y)$ *par passage à la limite dans les inégalités larges.*

(d) Montrer $\forall x \in [0,1], \ell(x) = \ell(x^2)$.

Soit $x \in [0,1]$.

- *La croissance de* ℓ *montre déjà* $\ell(x^2) \leqslant \ell(x)$.
- *Pour toute fonction* g *croissante, on a*

$$Tg(x) = \frac{1}{2}g(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{g(x^n)}{2^n}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}g(x) + g(x^2)\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n} \qquad \textit{(car } \forall n \geqslant 2, g(x^n) \leqslant g(x^2)\textit{)}$$
$$\leqslant \frac{g(x)+g(x^2)}{2}.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $T^{n+1}f(x) \leqslant \dfrac{T^n f(x) + T^n f(x^2)}{2}$.
En passant à la limite, il vient $\ell(x) \leqslant \dfrac{\ell(x)+\ell(x^2)}{2}$, *ce qui donne l'inégalité* $\ell(x^2) \geqslant \ell(x)$, *et conclut.*

(e) En déduire l'expression de ℓ.

Soit $x \in [0,1[$.
La question précédente et une récurrence immédiate montrent que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ell(x^{2^p}) = \ell(x)$.
Or, $x^{2^p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ *et* ℓ *est continue en* 0, *donc* $\ell(x^{2^p}) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \ell(0)$, *ce qui donne les égalités* $\ell(x) = \ell(0) = f(0)$ *par unicité de la limite.*
Ainsi, on a $\ell : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(0) & \textit{si } x < 1 \\ f(1) & \textit{si } x = 1. \end{cases} \end{cases}$

Partie V. Sur les éléments propres de T.

> On rappelle qu'étant donné un endomorphisme u d'un espace vectoriel réel V, pour tout $\lambda \in V$,
> - on note $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda\, \mathrm{id}_V)$;
> - le réel λ est une *valeur propre* de u si $E_\lambda(u)$ n'est pas réduit à l'espace nul ;
> - le *spectre (réel)* $\mathrm{Sp}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u.

18. Montrer que $\forall f \in E, \|Tf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ et en déduire que $\mathrm{Sp}(T) \subseteq [-1,1]$.

- *Soit* $f \in E$. *Pour tout* $x \in [0,1]$, *on a*

$$|Tf(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|f(x^n)|}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\|f\|_\infty}{2^n} = \|f\|_\infty,$$

  ce qui montre $\|Tf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.
- *Soit* $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. *On peut donc trouver* $f \in E$ *non nulle telle que* $Tf = \lambda f$.
  La fonction f *étant continue sur le segment* $[0,1]$, *le théorème des bornes atteintes fournit un réel* $a \in [0,1]$ *tel que* $|f(a)| = \|f\|_\infty > 0$.
  D'après le point précédent, on a $|Tf(a)| \leqslant \|Tf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.
  Par ailleurs, $|Tf(a)| = |\lambda|\ |f(a)| = |\lambda|\ \|f\|_\infty$.
  On en déduit $|\lambda|\ \|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.
  En divisant de part et d'autre par $\|f\|_\infty > 0$, *on obtient* $|\lambda| \leqslant 1$, *ce qui conclut.*

19. Montrer $0 \notin \mathrm{Sp}(T)$.

On va montrer que $\ker(T) = \{0\}$, *ce qui est équivalent à l'affirmation* $0 \notin \mathrm{Sp}(T)$.
Soit $f \in \ker T$. *Il suffit de montrer* $\|f\|_\infty = 0$ *pour obtenir* $f = 0$.
La fonction f *étant continue sur le segment* $[0,1]$, *le théorème des bornes atteintes entraîne l'existence de* $a \in [0,1]$ *tel que* $|f(a)| = \|f\|_\infty$.

On a déjà $f(1) = Tf(1) = 0$*, donc il n'y a rien à montrer si* $a = 1$*. On suppose dans la suite que* $a \in [0, 1[$*, et donc que* $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*.*

On a $Tf(a) = 0$*, donc* $\dfrac{f(a)}{2} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{f(a^n)}{2^n}$*.*

D'après l'inégalité triangulaire, on a donc

$$\frac{\|f\|_\infty}{2} = \frac{|f(a)|}{2} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|f(a^n)|}{2^n} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\|f\|_\infty}{2^n} = \frac{\|f\|_\infty}{2}.$$

Toutes les inégalités de cette chaîne doivent donc être des égalités, ce qui montre notamment

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|f(a^n)|}{2^n} = \frac{\|f\|_\infty}{2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\|f\|_\infty}{2^n} \qquad \text{donc} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{\|f\|_\infty - |f(a^n)|}{2^n}}_{\geqslant 0} = 0.$$

D'après la question 1, on en déduit $\forall n \in \mathbb{N}, \|f\|_\infty = |f(a^n)|$*.*
Or, la fonction f *étant continue, on a* $f(a^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0) = Tf(0) = 0$*.*
Par unicité de la limite, on en déduit $\|f\|_\infty = 0$*, ce qui conclut.*

20. Montrer $\dfrac{1}{2} \notin \mathrm{Sp}(T)$.

    Soit $f \in E_{1/2}(T)$*. On a donc, pour tout* $x \in [0, 1]$*,*

$$\frac{f(x)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n} = 0.$$

En appliquant judicieusement (ici, à $x = \sqrt{a}$*) l'égalité précédente, on obtient*

$$\frac{\|f\|_\infty}{4} = \left| -\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{f(a^{n/2})}{2^n} \right| \leqslant \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\left|f(a^{n/2})\right|}{2^n} \leqslant \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\|f\|_\infty}{2^n} = \frac{\|f\|_\infty}{4},$$

et le même raisonnement qu'à la question précédente, en considérant que l'égalité $f(0) = Tf(0) = \dfrac{f(0)}{2}$ *entraîne à nouveau* $f(0) = 0$*, montre que* $\|f\|_\infty = 0$*, ce qui conclut.*

21. (a) Montrer $1 \in \mathrm{Sp}(T)$.

    Un calcul direct montre que la fonction constante égale à 1 *appartient à* $E_1(T)$*, ce qui conclut.*

    (b) Décrire précisément $E_1(T)$.

    Soit $f \in E_1(T)$*. Puisque* $1 \in E_1(T)$*, toute combinaison linéaire* $f + \lambda 1$ *appartient à* $E_1(T)$*. On considère dans la suite* $g = f - f(0)$*, qui est donc un élément de* $E_1(T)$ *qui s'annule en* 0*.*
    L'appartenance de g *à* $E_1(T)$ *se réécrit*

$$\forall x \in [0, 1], g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(x^n)}{2^n} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{g(x)}{2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{g(x^n)}{2^n}.$$

Le même raisonnement qu'aux deux questions précédentes montre $g = 0$*, et donc* $f \in \mathrm{Vect}(1)$*.*
L'inclusion réciproque étant claire, on a montré que $E_1(T)$ *est le sous-espace vectoriel des fonctions constantes.*

Exercice supplémentaire.

Pas de corrigé ici, je vous laisse chercher. ☺