Neuvième (et dernière) composition de mathématiques

Durée : *4 heures.*

Sauf mention explicite du contraire, tout doit toujours être parfaitement justifié.

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci* $\boxed{\textit{d'encadrer}}$ *ou de <u>souligner</u> vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre.*

*Les documents, calculatrices, etc. sont **interdits**.*

Exercice.

Les trois questions sont indépendantes.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\,\sin^2(x)\,dx$.
2. Donner un équivalent de la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On considère l'équation différentielle $y' - \dfrac{4x+2}{2x^2+2x+1}y = 1$ (É), et on cherche ses solutions à valeurs réelles.
   (a) Résoudre l'équation différentielle homogène $y' - \dfrac{4x+2}{2x^2+2x+1}y = 0$.
   (b) Par la méthode de variation de la constante, trouver une solution à (É).
   (c) En déduire l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (É)

Problème. Étude d'un endomorphisme de $C^0([0,1])$.

> Dans ce problème, toutes les suites sont indexées par $\mathbb{N}^*$.

Partie I. Préliminaires.

1. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ une série à termes positifs convergente telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 0$.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0$.
2. Soit $q \in [0,1[$.

   Montrer que la famille $(q^n)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est sommable et que $\sum_{n=1}^{+\infty} n\, q^n = \dfrac{q}{(1-q)^2}$.
3. (a) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall q \in [0,1[\,, \sum_{k=1}^{n} \dfrac{q^k}{k} = -\ln(1-q) - \int_0^q \dfrac{(q-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\,dt$.

   (b) À l'aide du changement de variables $t = q\,u$, en déduire $\forall q \in [0,1[\,, \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{q^k}{k} = -\ln(1-q)$.
4. **Question (plus ou moins) de cours.** Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions continues sur le segment $[0,1]$. On suppose que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Montrer que g est continue.

Partie II. L'opérateur T.

> - Dans toute la suite du sujet, on note $E = C^0([0,1])$.
> - Pour tout $f \in E$, on définit la fonction
>
> $$T(f) : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}. \end{cases}$$
>
>   Pour simplifier, on notera souvent Tf la fonction $T(f)$, si bien que $\forall x \in [0,1], Tf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{f(x^n)}{2^n}$.
> - Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit $e_p : x \mapsto x^p$, qui est un élément de E.

5. Soit $f \in E$. Justifier que la fonction Tf est bien définie, c'est-à-dire que, pour tout $x \in [0,1]$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{f(x^n)}{2^n}$ converge.
6. Soit $f \in E$. Combien valent $Tf(0)$ et $Tf(1)$?
7. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer la fonction $T(e_p)$.
8. Montrer que T est une application linéaire $E \to \mathbb{R}^{[0,1]}$.

9. **Une condition suffisante de convergence uniforme.** Dans cette question, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on fixe une fonction bornée $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ et on suppose que la série $\sum_{n \geqslant 1} \|g_n\|_\infty$ converge.

   (a) Montrer que la fonction $G : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ est bien définie.

   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, on définit $G_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$. Montrer que la suite de fonctions $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers G.

10. Montrer que, pour tout $f \in E$, la fonction Tf est continue.

> On a donc montré que T induisait un endomorphisme de E (que l'on continuera à noter T).

Partie III. Fonctions continûment dérivables.

> - Dans cette partie, on fixe $f \in C^1([0,1])$.
> - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n = f \circ e_n : x \mapsto f(x^n)$.

11. Montrer que la fonction $h : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(x)}{2^n}$ est bien définie et continue.

> On introduit maintenant $H : x \mapsto \int_0^x h(t)\,dt$.

12. On suppose dans cette question que $f = e_p$ pour un certain entier $p \in \mathbb{N}^*$.
    (a) Expliciter h.
    (b) Montrer que $\forall x \in [0,1], Tf(x) = Tf(0) + H(x)$.
13. On revient au cas général. Montrer $\forall x \in [0,1], Tf(x) = Tf(0) + H(x)$.
14. Montrer que $Tf \in C^1([0,1])$.

Partie IV. Itération de l'opérateur T sur une fonction croissante.

- On fixe dans cette partie une fonction $f \in E$ croissante.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $T^n f = T^n(f) = (\underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ fois}})(f)$.

15. (a) Montrer que Tf est croissante.
    (b) Montrer que $\forall x \in [0, 1], Tf(x) \leqslant f(x)$.
16. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que la suite $(T^n f(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

On notera, pour tout $x \in [0, 1]$, $\ell(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} T^n f(x)$, ce qui définit une fonction $\ell : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

17. (a) Que valent $\ell(0)$ et $\ell(1)$?
    (b) Montrer que ℓ est continue en 0.
    (c) Montrer que ℓ est croissante.
    (d) Montrer $\forall x \in [0, 1], \ell(x) = \ell(x^2)$.
    (e) En déduire l'expression de ℓ.

Partie V. Sur les éléments propres de T.

On rappelle qu'étant donné un endomorphisme u d'un espace vectoriel réel V, pour tout $\lambda \in V$,

- on note $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \, \mathrm{id}_V)$;
- le réel λ est une *valeur propre* de u si $E_\lambda(u)$ n'est pas réduit à l'espace nul ;
- le *spectre (réel)* $\mathrm{Sp}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u.

18. Montrer que $\forall f \in E, \|Tf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ et en déduire que $\mathrm{Sp}(T) \subseteq [-1, 1]$.
19. Montrer $0 \notin \mathrm{Sp}(T)$.
20. Montrer $\dfrac{1}{2} \notin \mathrm{Sp}(T)$.
21. (a) Montrer $1 \in \mathrm{Sp}(T)$.
    (b) Décrire précisément $E_1(T)$.

Exercice supplémentaire.

Cet exercice difficile ne comptera essentiellement pas dans le barème : il ne sert qu'à vous occuper si vous avez fini ce qui précède.

Pour tout $n \geqslant 2$, on note $P(n)$ le plus grand diviseur premier de n.

Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n\,P(n)}$ converge.