Révisions calculatoires

Exercice 7.

1. (a) On pourra s'inspirer de la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique, ou se ramener à l'étude du signe d'un trinôme du second degré.

Exercice 8.

Pour la première question, on pourra appliquer l'inégalité arithmético-géométrique à $x^{\alpha_1}y^{\beta_1}$ et $x^{\alpha_2}y^{\beta_2}$ pour obtenir une inégalité à peu près du même type que celle de l'énoncé, avant de chercher à régler les exposants pour obtenir exactement l'inégalité souhaitée.

Cette recherche pourra être effectuée au brouillon, avant de « parachuter » les valeurs trouvées.

Exercice 13.

Montrer que l'on peut se ramener au cas où $|c| \leqslant |b| \leqslant a$, et en profiter pour se débarrasser de quelques valeurs absolues.

Exercice 14.

1. (Montrer que) le minimum de deux nombres est supérieur ou égal à leur moyenne.
2. L'idée de la question précédente possède des variantes...

Exercice 18.

Faire un dessin précis.

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) L'expression $\sqrt{xy}$ est définie si $xy \geqslant 0$; le produit $\sqrt{x}\sqrt{y}$ est défini si l'on a à la fois $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, ce qui est plus contraignant.
Dans les cas où les deux sont définies ($x, y \geqslant 0$), les deux expressions sont égales.
Ainsi, avant de remplacer $\sqrt{xy}$ par $\sqrt{x}\sqrt{y}$, on vérifiera bien que x et y sont tous deux positifs.

(ii) C'est esentiellement la même chose qu'au point précédent : l'expression $\ln(xy)$ est définie quand $xy > 0$, alors que $\ln(x) + \ln(y)$ est définie quand on a à la fois $x > 0$ et $y > 0$, ce qui est plus contraignant. Quand les deux sont définies, elles sont égales.
Ainsi, avant de remplacer $\ln(xy)$ par $\ln x + \ln y$, on vérifiera bien que x et y sont tous deux strictement positifs.

(iii) Le quotient $\dfrac{x^2}{x}$ est bien défini quand son dénominateur est non nul, c'est-à-dire quand $x \neq 0$.
En revanche, x est toujours bien défini. Dans le cas $x \neq 0$, les deux expressions sont égales.

(iv) Le quotient $\dfrac{xy}{x+y}$ est bien défini quand son dénominateur est non nul, c'est-à-dire quand $x + y \neq 0$, ce que l'on peut réécrire $y \neq -x$. Le quotient $\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ est quant à lui bien défini si x et y sont non nuls et que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \neq 0$ (ce qui est équivalent à $y \neq -x$).

Quand les trois conditions $x, y, x+y \neq 0$ sont remplies, les deux expressions sont égales, comme on le vérifie en mettant $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ au même dénominateur :

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{1}{\frac{y+x}{xy}} = \frac{xy}{x+y}.$$

(v) Les deux expressions x et $\sqrt{x^2}$ sont toujours bien définies (en effet, quel que soit le signe de x, x^2 est positif, donc il est un argument acceptable pour la fonction racine carrée). En revanche, elles ne sont égales que quand $x \geqslant 0$.

En effet, la racine carrée ne renvoie que des valeurs positives.

Si l'on veut une formule valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on écrira $\sqrt{x^2} = |x|$.

(vi) L'expression x est toujours bien définie, mais $\left(\sqrt{x}\right)^2$ n'est définie que si $x \geqslant 0$.

Dans le cas où $x \geqslant 0$, on a bien $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.

Autocorrection B.

(i) Supposons $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$.

D'après (e), on en déduit $b - a \geqslant 0$ et $d - c \geqslant 0$.

D'après (f), on en déduit $(b - a) + (d - c) \geqslant 0$, ce qui se réécrit $b + d - (a + c) \geqslant 0$.

D'après (e), on en déduit $a + c \leqslant b + d$.

(ii) Supposons $a \leqslant b$ et $c < d$.

On a *a fortiori* $c \leqslant d$, donc la question précédente entraîne $a + c \leqslant b + d$. Il reste à montrer que $a + c \neq b + d$.

Supposons par l'absurde $a+c = b+d$. On peut réécrire cette inégalité sous la forme $a-b = d-c$.

Or, par hypothèse, $a \leqslant b$, donc $b - a \geqslant 0$ d'après (e), donc $a - b \leqslant 0$ d'après (h). Par ailleurs $d - c \geqslant 0$ d'après (e).

Le nombre $a - b = d - c$ est donc à la fois $\leqslant 0$ et $\geqslant 0$, ce qui entraîne, d'après (b), que $a - b = d - c = 0$.

On en déduit que $c = d$, ce qui était exclu par l'hypothèse $c < d$. Cela conclut notre preuve par l'absurde.

On a donc montré à la fois $a + c \leqslant b + d$ et $a + c \neq b + d$, donc on a $a + c < b + d$.

(iii) Supposons $a \leqslant 0$ et $b \geqslant 0$.

D'après (h), on en déduit $-a \geqslant 0$.

D'après (g), on en déduit $-ab = (-a) \times b \geqslant 0$.

D'après (h), on en déduit $ab \leqslant 0$.

(iv) Supposons $a \leqslant 0$ et $b \geqslant 0$.

D'après (h), on en déduit $-a \geqslant 0$ et $-b \geqslant 0$.

D'après (g), on en déduit $ab = (-a) \times (-b) \geqslant 0$.

(v) Supposons $a > 0$ et $b > 0$.

A fortiori, $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, donc $ab \geqslant 0$ d'après (g).

Or, d'après la règle du produit nul, le fait que a et b soient non nuls entraîne que $ab \neq 0$.

On en déduit $ab > 0$.

(vi) Supposons $a < 0$ et $b > 0$.
A fortiori, $a \leqslant 0$ et $b \geqslant 0$, donc $ab \leqslant 0$ d'après (iii).
Or, d'après la règle du produit nul, le fait que a et b soient non nuls entraîne que $ab \neq 0$.
On en déduit $ab < 0$.

(vii) Supposons $a < 0$ et $b < 0$.
A fortiori, $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$, donc $ab \geqslant 0$ d'après (iv).
Or, d'après la règle du produit nul, le fait que a et b soient non nuls entraîne que $ab \neq 0$.
On en déduit $ab > 0$.

(viii) Soit $a \in \mathbb{R}$. On distingue deux cas.
- si $a \geqslant 0$, alors $a^2 = a \times a \geqslant 0$ d'après (g) ;
- si $a \leqslant 0$, alors $a^2 = a \times a \geqslant 0$ d'après (iv).

Dans les deux cas (qui recouvrent tous les cas possibles, d'après (d)), on a $a^2 \geqslant 0$.

(ix) Supposons $a \leqslant b$ et $\lambda \geqslant 0$.
D'après (e), on a $b - a \geqslant 0$.
D'après (g), on en déduit $\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a) \geqslant 0$.
D'après (e), on en déduit $\lambda a \leqslant \lambda b$.

(x) Supposons $a \leqslant b$ et $\lambda \leqslant 0$.
D'après (e), on a $b - a \geqslant 0$.
D'après (iii), on en déduit $\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a) \leqslant 0$.
D'après (e), on en déduit $\lambda a \geqslant \lambda b$.

(xi) Supposons $a < b$ et $\lambda > 0$.
On peut *a fortiori* appliquer (ix) et en déduire $\lambda a \leqslant \lambda b$.
Supposons par l'absurde que $\lambda a = \lambda b$. En multipliant par $\frac{1}{\lambda}$ de part et d'autre de l'égalité (ce qui est légitime car $\lambda \neq 0$), on obtient $a = b$, ce qui est exclu.
Ainsi, $\lambda a \neq \lambda b$, donc $\lambda a < \lambda b$.

(xii) Supposons $a < b$ et $\lambda < 0$.
On peut *a fortiori* appliquer (x) et en déduire $\lambda a \geqslant \lambda b$.
Supposons par l'absurde que $\lambda a = \lambda b$. En multipliant par $\frac{1}{\lambda}$ de part et d'autre de l'égalité (ce qui est légitime car $\lambda \neq 0$), on obtient $a = b$, ce qui est exclu.
Ainsi, $\lambda a \neq \lambda b$, donc $\lambda a > \lambda b$.

(xiii) Supposons $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$.
Comme $a \geqslant 0$, l'inégalité $c \leqslant d$ et la propriété (ix) entraînent $ac \leqslant ad$.
Comme $d \geqslant 0$, l'inégalité $a \leqslant b$ et la propriété (ix) entraînent $ad \leqslant bd$.
D'après (c), on en déduit $ac \leqslant bd$.
Remarque. On peut condenser cette preuve en un calcul un peu « parachuté » :

$$\begin{aligned} bd - ac &= bd - ad + ad - ac \\ &= \underbrace{(b-a)}_{\geqslant 0}\underbrace{d}_{\geqslant 0} + \underbrace{a}_{\geqslant 0}\underbrace{(d-c)}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

On reviendra dans le cours sur ce genre de manipulations.

(xiv) Supposons $0 < a < b$ et $0 < c < d$.
Comme $a > 0$, l'inégalité $c < d$ et la propriété (xi) entraînent $ac < ad$.
Comme $d > 0$, l'inégalité $a < b$ et la propriété (xi) entraînent $ad < bd$.

Pour conclure que $ac < bd$, il suffit de montrer l'équivalent strict de la propriété (c), c'est-à-dire que si $x, y, z \in \mathbb{R}$ vérifient $x < y$ et $x < z$ entraînent $x < z$.
Soit donc $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et $y < z$.
On a *a fortiori* $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, donc (c) entraîne $x \leqslant z$.
Supposons par l'absurde $x = z$. L'inégalité $y \leqslant z$ se traduit donc en $y \leqslant x$. D'après (b), on a $x = y$, ce qui contredit l'hypothèse $x < y$.
On a donc bien $x \neq z$, donc $x < z$, ce qui conclut la preuve.

(xv) Supposons $a > 0$.
Supposons par l'absurde $\frac{1}{a} \leqslant 0$.
On a $a \geqslant 0$ et $\frac{1}{a} \leqslant 0$. D'après (iii), on en déduit $1 = a \times \frac{1}{a} \leqslant 0$.
Par ailleurs, $1 = 1^2$, donc (viii) entraîne $1 \geqslant 0$.
D'après (b), on en déduit $1 = 0$, ce qui est absurde.
Ainsi, on sait que $\frac{1}{a}$ n'est pas $\leqslant 0$. Or, d'après (c), on sait que $\frac{1}{a} \geqslant 0$ ou $\frac{1}{a} \leqslant 0$. La seule possibilité est donc que $\frac{1}{a} \geqslant 0$.
Enfin, comme l'inverse d'un nombre réel n'est jamais nul, on en déduit $\frac{1}{a} > 0$.

(xvi) Supposons $0 < a \leqslant b$.
On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} &= \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} && \text{(légitime car } a, b \neq 0\text{)} \\ &= (b - a) \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Les trois termes de ce produit sont $\geqslant 0$ (le premier par (e), les deux suivants par (xv)), donc on obtient $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \geqslant 0$, donc $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$.

(xvii) Supposons $0 < a < b$.
On a donc *a fortiori* $0 < a \leqslant b$, donc la question précédente entraîne $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$.
Par ailleurs, si l'on avait $\frac{1}{b} = \frac{1}{a}$, on obtiendrait $a = b$ en multipliant les deux termes de l'égalité par ab, ce qui est exclu.
On a donc $\frac{1}{b} \neq \frac{1}{a}$, ce qui montre $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Remarque. Cet exercice n'est pas passionnant en tant que tel, même s'il y a un certain confort intellectuel à noter que les manipulations des inégalités se ramènent à un petit nombre de propriétés basiques.

En revanche, il est important de savoir utiliser ces différentes propriétés quand on manipule des inégalités, et notamment de faire très attention à distinguer les inégalités larges et strictes.

Autocorrection C.

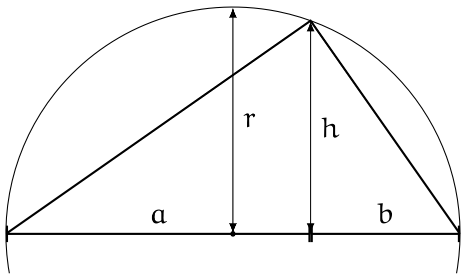
1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$.
On a $(a - b)^2 \geqslant 0$, donc $a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$. Cela montre $2ab \leqslant a^2 + b^2$, et on obtient l'inégalité de l'énoncé en multipliant de part et d'autre par $\frac{1}{2} \geqslant 0$.

2. Soit $ab \in \mathbb{R}_+$.
   En appliquant l'inégalité de la première question aux racines carrées $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$, on obtient l'inégalité

$$\sqrt{a}\sqrt{b} \leqslant \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2}{2},$$

   et on conclut en remarquant que $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ et $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

   Remarque. Même si les deux inégalités que l'on vient de voir sont essentiellement équivalentes, c'est la seconde que l'on appelle *inégalité arithmético-géométrique*, car la quantité $\sqrt{ab}$ s'appelle la *moyenne géométrique* de a et b, alors que la moyenne usuelle $\frac{a+b}{2}$ est souvent qualifiée d'*arithmétique*.
   On peut d'ailleurs la voir géométriquement, comme le montre la preuve sans paroles suivante.



$$\sqrt{ab} = h \leqslant r = \frac{a+b}{2}.$$

   On l'étendra plus tard à n arguments : quels que soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

3. Reprenons les deux inégalités.

   - Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Si $ab = \frac{a^2+b^2}{2}$, on peut « remonter » les manipulations de la première question pour en déduire $(a-b)^2 = 0$.
     On en déduit $a - b = 0$ (d'après la règle du produit nul), donc $a = b$.

     Comme il est par ailleurs clair que, si $a = b$, alors $ab = \frac{a^2+b^2}{2}$, on a que le cas d'égalité est exactement celui où a et b sont égaux.

   - Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$. En appliquant le premier point à $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$, on voit que si $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$, alors $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, et on obtient $a = b$ en élevant au carré de part et d'autre de l'égalité.

     Comme il est par ailleurs clair que, si $a = b$, alors $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$, on a que le cas d'égalité est exactement celui où a et b sont égaux.

Autocorrection D.

1. On distingue trois cas (ce n'est pas la démonstration la plus élégante, mais ça marche bien !).
   - Si a et b sont $\geqslant 0$, on a $|a+b| = a+b = |a|+|b|$, donc l'inégalité est vraie (et est une égalité).
   - Si a et b sont $\leqslant 0$, on a $|a+b| = -(a+b) = -a-b = |a|+|b|$, donc l'inégalité est vraie (et est une égalité).
   - Il reste à traiter le cas où l'un des deux nombres est < 0 et l'autre > 0. Les deux nombres jouant des rôles complètement symétriques, on peut supposer $a > 0$ et $b < 0$.

On va alors utiliser le fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \leqslant x$ (évident, en distinguant les cas $x \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$, ou en comparant les graphes).
En effet, comme $b < 0$, on a $a + b < a$, d'où la chaîne d'inégalités

$$|a+b| \leqslant a+b < a < a+|b| = |a|+|b|\,,$$

ce qui montre l'inégalité (qui est dans ce cas stricte).

2. La démonstration précédente montre que l'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si $a, b \geqslant 0$ ou $a, b \leqslant 0$, c'est-à-dire si et seulement si a et b sont de même signe (au sens large).
3. L'équation se réécrit $|x| + |x-1| = 1$.
Or, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité triangulaire donne

$$1 = |x+1-x| \leqslant |x| + |1-x| = |x| + |x-1|\,.$$

Ainsi, si $|x| + |x-1| = 1$, on est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, ce qui montre que x et $1-x$ ont le même signe. Le seul cas possible est $x \geqslant 0$ et $1-x \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \in [0,1]$.
Formellement, on a montré

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2} = 1 \Rightarrow x \in [0,1]\,.$$

Réciproquement, on voit que si $x \in [0,1]$, on a $\sqrt{x^2} = |x| = x$ et $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = x-1$, donc on a bien $\sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2} = 1$.
In fine, l'ensemble des solutions de l'équation est le segment $[0,1]$.

Autocorrection E.

1. (a) On distingue deux cas.
   - Si $a \leqslant b$, on a $\min(a,b) = a$ et $\max(a,b) = b$.
   - Si $a \geqslant b$, on a $\min(a,b) = b$ et $\max(a,b) = a$.

   Dans tous les cas, $\min(a,b) + \max(a,b) = a + b$.

   (b) On distingue deux cas.
   - Si $a \leqslant b$, on a $|a-b| = b-a$ donc $a+b+|a-b| = 2b$.
   - Si $a \geqslant b$, on a $|a-b| = a-b$ donc $a+b+|a-b| = 2a$.

   Dans tous les cas, $\dfrac{a+b+|a-b|}{2} = \max(a,b)$.

   (c) On montre de la même façon $\min(a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.
2. On a les équivalences suivantes :
   (i) $\min(x_1,\dots,x_n) \leqslant \alpha \Leftrightarrow \big(x_1 \leqslant \alpha$ ou $\cdots$ ou $x_n \leqslant \alpha\big) \Leftrightarrow \exists i \in [\![1,n]\!] : x_i \leqslant \alpha$.
   (ii) $\min(x_1,\dots,x_n) \geqslant \alpha \Leftrightarrow \big(x_1 \geqslant \alpha$ et $\cdots$ et $x_n \geqslant \alpha\big) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!] : x_i \geqslant \alpha$.
   (iii) $\max(x_1,\dots,x_n) \leqslant \alpha \Leftrightarrow \big(x_1 \leqslant \alpha$ et $\cdots$ et $x_n \leqslant \alpha\big) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!] : x_i \leqslant \alpha$.
   (iv) $\max(x_1,\dots,x_n) \geqslant \alpha \Leftrightarrow \big(x_1 \geqslant \alpha$ ou $\cdots$ ou $x_n \geqslant \alpha\big) \Leftrightarrow \exists i \in [\![1,n]\!] : x_i \geqslant \alpha$.

Autocorrection F.

(i) $\mathcal{S} = [-6,6]$;
(ii) $\mathcal{S} = [-2,6]$;
(iii) $\mathcal{S} = \varnothing$;

(iv) $\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{6}\right\}$;

(v) $\mathcal{S} = \{1, 3, 5, 7\}$;

(vi) $\mathcal{S} =]1, 3[\cup]5, 7[$;

(vii) $\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{3}, 4\right\}$ (on peut utiliser le fait que pour deux réels a, b, l'égalité $|a| = |b|$ est équivalente à l'égalité $a^2 = b^2$) ;

(viii) $\mathcal{S} = \{0, 2\}$ (on peut par exemple procéder par analyse et synthèse, comme dans le chapitre 0, en utilisant que si $a = b$, alors $a^2 = b^2$) ;

(ix) Après résolution de l'équation de $x^2 - 3x - 3 = 0$ (les solutions sont les nombres $\rho = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$ et $\sigma = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$), on peut procéder par analyse et synthèse (les méthodes consistant à élever au carré nous conduisant à résoudre une équation de degré 4, ce qui n'est guère engageant).

Remarquons déjà que l'encadrement $16 < 21 < 25$ entraîne $4 < \sqrt{21} < 5$, qui entraîne à son tour $\rho \in]-1, -1/2[$ et $\sigma \in]7/2, 4[$.

Analyse. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\left|x^2 - 3x - 3\right| = x + 2$ (†). Distinguons deux cas.

- Si $x \leqslant \rho$ ou $x \geqslant \sigma$, on a $x^2 - 3x - 2 \geqslant 0$, donc (†) devient $x^2 - 3x - 3 = x + 2$, c'est-à-dire $x^2 - 4x - 5 = 0$. Les solutions de cette équation sont -1 et 5. La première est bien $\leqslant \rho$, la seconde est bien $\geqslant \sigma$.

  Dans le premier cas, on a donc $x = -1$ ou $x = 5$.
- Si $\rho \leqslant x \leqslant \sigma$, on a $x^2 - 3x - 2 \leqslant 0$, donc (†) devient $-(x^2 - 3x - 3) = x + 2$, c'est-à-dire $x^2 - 2x - 1 = 0$. Les solutions de cette équation sont $1 \pm \sqrt{2}$, qui appartiennent bien à l'intervalle $|\rho, \sigma]$.

Ainsi, la liste des candidats est $-1, 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$ et 5.

Synthèse. On vérifie que ces quatre nombres sont bien solutions de l'équation (†).

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{-1, 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 5\right\}$.

(x) On va procéder en deux temps, en cherchant d'abord les solutions de cette inéquation telles que $x^2 + 5x + 3 \geqslant 0$, puis celles pour lesquelles $x^2 + 5x + 3 \leqslant 0$. Observons que les solutions de $x^2 + 5x + 3 = 0$ sont les nombres

$$\rho = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \in \left[-\frac{9}{2}, -4\right] \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right].$$

Premier cas. Soit $x \in]-\infty, \rho] \cup [\sigma, +\infty[$. On a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned} \left|x^2 + 5x + 3\right| < x + 2 &\Leftrightarrow x^2 + 5x + 3 < x + 2 && \text{car } x^2 + 5x + 3 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \left]-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\right[&& \text{(après résolution).} \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $\rho \leqslant -4 < -2 - \sqrt{3}$ et $\sigma < -2 + \sqrt{3}$ (ce que l'on peut vérifier en partant de l'inégalité $\sqrt{13} - \sqrt{12} = \frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{12}} < 1$), l'encadrement $x \in \left]-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\right[$ est en fait équivalent à

$$x \in \left[\sigma, -2 + \sqrt{3}\right[.$$

Deuxième cas. Soit $x \in [\rho, \sigma]$. On a la chaîne d'équivalences

$$\left|x^2 + 5x + 3\right| < x + 2 \Leftrightarrow -\left(x^2 + 5x + 3\right) < x + 2 \qquad \text{car } x^2 + 5x + 3 \leqslant 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x^2 + 5x + 3 > -x - 2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 > 0 \\
&\Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -5\right[\cup \left]-1, +\infty\right[\qquad\qquad \text{(après résolution).}
\end{aligned}$$

Comme $-5 < \rho < -1 < \sigma$, cette dernière assertion est en fait équivalente à

$$x \in \left]-1, \sigma\right].$$

In fine, on obtient $= \left]-1, \sigma\right] \cup \left[\sigma, -2 + \sqrt{3}\right[= \left]-1, -2 + \sqrt{3}\right[$.

(xi) En procédant de la même manière qu'à la question précédente, c'est-à-dire en distinguant les cas $x \leqslant -1$ et $x \geqslant -1$, on obtient $\mathcal{S} = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

(xii) En distinguant trois cas, suivant que x appartienne à $\left]-\infty, -1\right]$, $[-1, 0]$ ou $[0, +\infty[$, on trouve $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$.

(xiii) Comme à la question précédente, on pourrait distinguer trois cas, suivant que x appartienne à $\left]-\infty, 2\right]$, $[2, 7]$ ou $[7, +\infty[$.
Cependant, il est plus efficace de montrer par l'absurde qu'il n'y a aucune solution. En effet, si l'on avait un x tel que $|x - 7| + |x - 2| \leqslant 3$, on aurait, d'après l'inégalité triangulaire

$$5 = |7 - 2| \leqslant |7 - x| + |x - 2| \leqslant 3,$$

ce qui est absurde.
Ainsi, $\mathcal{S} = \varnothing$.

(xiv) La quantité $(4x + 7)^{20}$ est nulle si et seulement si $x = -7/4$, et strictement positive dans tous les autres cas. On obtient ainsi $\mathcal{S} = \left]-\infty, -4\right[\setminus \left\{-\dfrac{7}{4}\right\} = \left]-\infty, -4\right[$.