Révisions calculatoires

Manipulation d'expressions

Autocorrection A.

Les expressions suivantes (mettant en jeu des nombres réels x, y) ne sont pas tout à fait synonymes. Préciser dans chaque cas les valeurs des variables pour lesquelles les expressions ont un sens, et celles pour lesquelles on peut sans problème remplacer l'une par l'autre.

(i) $\sqrt{xy}$ et $\sqrt{x}\,\sqrt{y}$;

(ii) $\ln(xy)$ et $\ln x + \ln y$;

(iii) $\dfrac{x^2}{x}$ et x ;

(iv) $\dfrac{xy}{x+y}$ et $\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$;

(v) x et $\sqrt{x^2}$;

(vi) x et $\left(\sqrt{x}\right)^2$.

Exercice 1.

1. Pour quelles valeurs de x la quantité $\sqrt{x}$ est-elle définie ? Quelle est sa définition ?
2. Combien vaut $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$?
3. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 = y^2$. Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$.
5. Soit a et b deux nombres rationnels non nuls. On admet que cela entraîne $a+b\sqrt{5} \neq 0$. Trouver deux nombres rationnels $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $\dfrac{1}{a+b\sqrt{5}} = x+y\sqrt{5}$.
6. Quelle est la limite de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ quand $x \to +\infty$?

Exercice 2.

1. Factoriser (x désigne un nombre réel).

   (i) $x^2 + 18x + 81$; (ii) $x^4 + 4x^3 - 12x^2$; (iii) $(x^2+1)^2 - 4x^2$.

2. Simplifier (on précisera pour quelles valeurs des variables les expressions données ont un sens). Indiquer, en fonction des valeurs des variables, le signe de l'expression.

   (i) $\dfrac{\dfrac{x^2-x-6}{2xy}}{\dfrac{x^2-9}{2x^2y}}$;

   (ii) $\dfrac{x^2+x^{-2}-2}{x^2-x^{-2}}$;

   (iii) $\dfrac{1}{2x^2-2x+1} - \dfrac{1}{2x^2+2x+1}$.

3. (a) À l'aide de l'identité remarquable factorisant $x^2 - y^2$, expliquer pourquoi 91 n'est pas un nombre premier.
   (b) Soit $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$. Factoriser $xy + \alpha x + \beta y + \alpha\beta$.
   (c) Trouver tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que $3x^2y^2 + y^2 = 27x^2 + 100$.

Exercice 3. ☑

Réduire les expressions suivantes au même dénominateur (en présence d'une ou de plusieurs variable(s), on commencera par déterminer pour quelles valeurs réelles de ces variables l'expression a un sens).

(i) $\dfrac{1}{60} + \dfrac{1}{48}$;

(ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$;

(iii) $\dfrac{2}{(x+1)^2(x+3)} - \dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

(iv) $\dfrac{1}{x^2 - y^2} + \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 2xy}$;

(v) $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{2x+1}{2x-1}}{\dfrac{2x+1}{x-1} - \dfrac{x+1}{2x-1}}$.

Inégalités

Autocorrection B. ☑

En plus des règles usuelles de calcul dans $\mathbb{R}$, on admet que la relation d'ordre $\leqslant$ vérifie les propriétés suivantes

(a) quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x$;

(b) si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$;

(c) si $x, y, z \in \mathbb{R}$ vérifient $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$;

(d) quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$;

(e) quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leqslant y$ si et seulement si $y - x \geqslant 0$;

(f) si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $x, y \geqslant 0$, alors $x + y \geqslant 0$;

(g) si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $x, y \geqslant 0$, alors $xy \geqslant 0$;

(h) si $x \geqslant 0$, alors $-x \leqslant 0$, et réciproquement.

(et on note, pour deux nombres réels x et y, $x < y$ si $x \leqslant y$ et $x \neq y$).

En utilisant uniquement ces propriétés, montrer les assertions qui suivent (portant sur des nombres réels a, b, c, d, λ) :

(i) si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$;

(ii) si $a \leqslant b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$;

(iii) si $a \leqslant 0$ et $b \geqslant 0$, alors $ab \leqslant 0$;

(iv) si $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$, alors $ab \geqslant 0$;

(v) si $a > 0$ et $b > 0$, alors $ab > 0$;

(vi) si $a < 0$ et $b > 0$, alors $ab < 0$;

(vii) si $a < 0$ et $b < 0$, alors $ab > 0$;

(viii) quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $a^2 \geqslant 0$;

(ix) si $a \leqslant b$ et $\lambda \geqslant 0$, alors $\lambda a \leqslant \lambda b$;

(x) si $a \leqslant b$ et $\lambda \leqslant 0$, alors $\lambda a \geqslant \lambda b$;

(xi) si $a < b$ et $\lambda > 0$, alors $\lambda a < \lambda b$;

(xii) si $a < b$ et $\lambda < 0$, alors $\lambda a > \lambda b$;

(xiii) si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $ac \leqslant bd$;

(xiv) si $0 < a < b$ et $0 < c < d$, alors $ac < bd$;

(xv) si $0 < a$, alors $0 < \dfrac{1}{a}$;

(xvi) si $0 < a \leqslant b$, alors $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$;

(xvii) si $0 < a < b$, alors $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.

Exercice 4.

Deux nombres vérifient $\dfrac{a}{b} \geqslant 1$. Peut-on en déduire $\dfrac{a+1}{b+1} \geqslant 1$?

Exercice 5. ☑

1. Soit $\lambda, x, y, m_1, m_2, M_1, M_2$ tels que l'on ait les encadrements
$$m_1 \leqslant x \leqslant M_1 \qquad \text{et} \qquad m_2 \leqslant y \leqslant M_2.$$
Quels encadrements obtient-on pour les quantités
(i) λy ? (ii) $x + y$? (iii) $x - y$? (iv) $|x|$?
On suppose en outre que $m_1 > 0$ et $m_2 > 0$. Quels encadrements obtient-on pour
(v) $\ln x$? (vi) $\dfrac{1}{y}$? (vii) xy ? (viii) $\dfrac{x}{y}$?
2. Soit $x \in [1, 4]$. Encadrer grossièrement (c'est-à-dire en n'utilisant que les manipulations de la question précédente) l'expression $\dfrac{x^2 + x + 1}{3x + 2}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Encadrer grossièrement $\cos x + \sin x$.
   (b) Trouver $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\cos x + \sin x = A\cos(x + \varphi)$. En déduire un meilleur encadrement de cette quantité.
4. Soit $x \in [0, 2]$ différent de 1.
   (a) Montrer $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{x} - 2} = \dfrac{(\sqrt{x} + 1)(x - 2)}{\sqrt{x} + 2}$.
   (b) En déduire que $\left|\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{x} - 2}\right| \leqslant 2$.

Exercice 6.
Soit $a, b \in]-1, 1[$. Montrer $\dfrac{a + b}{1 + ab} \in]-1, 1[$.

Inégalité arithmético-géométrique, variantes et conséquences

Autocorrection C. ☑

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. En utilisant une identité remarquable, montrer que $ab \leqslant \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer *l'inégalité arithmético-géométrique* :
$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a + b}{2}.$$
3. Pour chacune des questions précédentes, déterminer le *cas d'égalité* de l'inégalité, c'est-à-dire déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles on peut remplacer le symbole $\leqslant$ par $=$.

Exercice 7.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.
   (b) En déduire que pour tous $x, y, z > 0$ de somme s, on a
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant 6 - s.$$
2. (a) En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique, montrer que pour tous $x, y, z \geqslant 0$, on a
$$(x+y)(y+z)(x+z) \geqslant 8xyz.$$
   (b) En déduire que pour tous $x, y, z > 0$ de somme s, on a
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant \frac{9}{s}.$$
3. Des deux inégalités obtenues en 1. (b) et en 2. (b), l'une d'elles est-elle meilleure que l'autre ? Si oui, laquelle ?

Exercice 8$^+$.

1. En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique, montrer que pour tous $x, y > 0$,
$$\frac{x}{x^4 + y^2} \leqslant \frac{1}{2xy}.$$
2. En déduire que pour tous $x, y > 0$,
$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leqslant \frac{1}{xy}.$$

Exercice 9^{++}.

1. Démontrer que pour tous $x, y > 0$, on a
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2.$$
2. En déduire *l'inégalité de Nesbitt* : pour tous $a, b, c > 0$, on a
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Valeur absolue, minimum et maximum

Autocorrection D.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer *l'inégalité triangulaire* :
$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$
2. Montrer que l'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si a et b sont de même signe.
3. Utiliser ce qui précède pour résoudre l'équation $\sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2} = 1$.

Autocorrection E.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) Combien vaut $\min(a, b) + \max(a, b)$?
   (b) Montrer $\max(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$.
   (c) Énoncer et démontrer une formule analogue pour $\min(a, b)$.
2. Soit $x_1, \dots, x_n, \alpha \in \mathbb{R}$. Reformuler les inégalités suivantes à l'aide de connecteurs logiques et/ou de quantificateurs.

   (i) $\min(x_1, \dots, x_n) \leqslant \alpha$;
   (ii) $\min(x_1, \dots, x_n) \geqslant \alpha$;
   (iii) $\max(x_1, \dots, x_n) \leqslant \alpha$;
   (iv) $\max(x_1, \dots, x_n) \geqslant \alpha$.

Autocorrection F.

Résoudre les (in)équations suivantes dans $\mathbb{R}$. Quand c'est pertinent, on présentera l'ensemble des solutions comme une union d'intervalles disjoints.

(i) $|x| - 2 \leqslant 4$;
(ii) $|x - 2| \leqslant 4$;
(iii) $|x - 2| \leqslant -4$;
(iv) $|x^2 - 4| = 2$;
(v) $|x^2 - 8x + 11| = 4$;
(vi) $|x^2 - 8x + 11| < 4$;
(vii) $|x + 1| = |2x - 3|$;
(viii) $|1 - 2x| = x + 1$;
(ix) $|x^2 - 3x - 3| = x + 2$;
(x) $|x^2 + 5x + 3| < x + 2$;
(xi) $2 - x < |x + 1|$;
(xii) $|x| + |x + 1| = 2$;
(xiii) $|x - 7| + |x - 2| \leqslant 3$;
(xiv) $(4x + 7)^{20}(2x + 8) < 0$.

Exercice 10.

Montrer $\forall x, y \in \mathbb{R}, \sin(x)\cos(y) \geqslant -1$.

Exercice 11.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

1. (a) En appliquant l'inégalité triangulaire, montrer $|a - b| \geqslant |a| - |b|$.
   (b) Le premier membre de l'inégalité précédente ne change pas si l'on échange a et b, alors que le second membre si. Cette constatation permet d'améliorer l'inégalité précédente. Comment ?
2. Montrer $|a| + |b| \leqslant |a + b| + |a - b|$.

Exercice 12.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer

$$1 + |ab - 1| \leqslant (1 + |a - 1|)(1 + |b - 1|) \qquad \text{et} \qquad \frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leqslant \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}.$$

Exercice 13$^+$.

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer

$$|a| + |b| + |c| - |a + b| - |a + c| - |b + c| + |a + b + c| \geqslant 0.$$

Exercice 14$^+$.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer $\max(a^2 + b, b^2 + a) \geqslant -\dfrac{1}{4}$.
2. Soit $a, b, c \in [0, 1]$. Montrer $\max\big(a(1 - b), b(1 - c), c(1 - a)\big) \geqslant \dfrac{1}{4}$.

Quatre exercices (« pour enfants de 5 à 15 ans ») de Vladimir Arnol'd

Exercice 15.
Une chenille se trouve dans un coin d'une salle cubique et souhaite ramper jusqu'au coin opposé. Quels sont les chemins les plus courts ?

Exercice 16.
Calculer la somme $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100}$ à la main, à 1% près.

Exercice 17$^+$.
Deux volumes de Puškin (le premier et le second) sont posés sur une étagère, côte à côte. Un ver creuse à travers les livres (perpendiculairement aux pages), de la première page du premier volume à la dernière page du deuxième. Sachant que chaque couverture a une épaisseur de 2 mm et que l'ensemble des pages de chaque volume a une épaisseur de 2 cm, quelle est la longueur du trajet du ver ?

Exercice 18$^+$.
Un examen universitaire américain pose la question suivante.

> On donne ABC un triangle rectangle en A, dont l'hypothénuse [BC] mesure 10 pouces et la hauteur issue de A mesure 6 pouces.
>
> Calculer l'aire du triangle ABC.

Les étudiants américains donnent majoritairement la réponse attendue (30 pouces carrés), mais les étudiants russes en visite ne peuvent pas répondre à la question. Pourquoi ?