Ensembles et applications

Exercice 5.

On pourra se convaincre que $\liminf_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à tous les $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang, alors que $\limsup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à une infinité de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cela permettra, notamment pour les deux dernières questions, de formuler des conjectures que l'on démontrera à l'aide des canevas de preuve standard.

Exercice 8.

Revenir aux définitions de l'inclusion et de l'ensemble des parties. Il faudra faire très attention au **type** des objets (s'agit-ils d'entiers ? d'ensembles d'entiers ?).

Exercice 9.

On pourra montrer l'égalité $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ en suivant les canevas de preuves standard.

Pour montrer que l'autre égalité est, en général, fausse, commencer par dessiner des diagrammes de Venn.

Exercice 14.

Pour la toute dernière question, remarquer que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $[\![0, n]\!]$ contient 0.

Exercice 15.

Comment peut-on exploiter l'hypothèse selon laquelle A est non vide ?

Une fois que cela est fait, qu'est-ce que l'assertion

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \in A \Rightarrow n+1 \in A,$$

plus faible que l'hypothèse de l'énoncé, permet déjà de démontrer ?

Exercice 25.

On pourra admettre que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 27.

La condition nécessaire et suffisante attendue pour l'injectivité de ψ est $X \cup Y = \Omega$.

Exercice 31.

La question sur la parité est un (petit) piège. Commencer par tenter de dessiner un graphe de fonction paire bijective...

Exercice 50.

4. On pourra penser à la décomposition en facteurs premiers.

Autocorrection

Autocorrection A.

- Par définition, $E \subseteq F$ est équivalente à $\forall x \in E, x \in F$. Sa négation est donc $\exists x \in E : x \notin F$.

  Pour montrer que E *n'est pas inclus dans* F*, il s'agit de trouver un élément de* E *qui n'appartienne pas à* F.

- L'assertion $E = F$ est équivalente à $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$. Sa négation est donc $E \not\subseteq F$ ou $F \not\subseteq E$. D'après ce que l'on vient de dire, la négation de $E = F$ est équivalente à

$$\exists x \in E : x \notin F \text{ ou } \exists x \in F : x \notin E.$$

  Pour montrer que E *et* F *sont deux ensembles différents, il s'agit de trouver un élément de l'un des deux qui n'appartienne pas à l'autre.*

Autocorrection B.
On a

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \Big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}.$$

Il y a à chaque fois plusieurs façons de faire, donnons quelques exemples.

(i) $\varnothing = A \setminus A = B \setminus B$;
(ii) $\{1\} = A \setminus B$;
(iii) $\{2\} = A \cap B$;
(iv) $\{3\} = B \setminus A$;
(v) $\{1,2\} = A$;
(vi) $\{1,3\} = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
(vii) $\{2,3\} = B$;
(viii) $\{1,2,3\} = A \cup B$.

Autocorrection C.

(i) Montrons la première égalité. Comme le terme de gauche est manifestement une partie de E, il suffit de montrer l'inclusion réciproque $A \cup (E \setminus A) \supseteq E$.
Soit $x \in E$.

  Montrons $x \in A \cup (E \setminus A)$, c'est-à-dire $x \in A$ ou $x \in E \setminus A$.
  On va procéder en suivant le canevas standard, c'est-à-dire en supposant la négation de l'une des assertions et en montrant l'autre.
  Supposons $x \notin A$.

    On a donc à la fois $x \in E$ et $x \notin A$, ce qui montre $x \in E \setminus A$.

  Cela conclut.

(ii) Montrons l'égalité par double inclusion.
- Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B)$. On cherche à montrer que $x \in A$.

  Distinguons deux cas.
  - Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ (et $x \in B$).
  - Si $x \in A \setminus B$, alors $x \in A$ (et $x \notin B$).

  Dans tous les cas, on a bien $x \in A$, ce qui montre l'inclusion $(A \cap B) \cup (A \setminus B) \subseteq A$.
- Réciproquement, soit $x \in A$.

  Distinguons deux cas.

- Si $x \in B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $x \in A \cap B$. *A fortiori*, $x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.
- Si $x \notin B$, alors $x \in A$ et $x \notin B$, donc $x \in A \setminus B$. *A fortiori*, $x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

Dans tous les cas, on a bien $x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B)$, ce qui montre l'inclusion réciproque, et conclut.

Remarque. La première question est en fait un cas particulier de celle-ci, dans le cas $B = E$.

(iii) Supposons $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$.

Soit $x \in A$. Montrons $x \in C$.

Puisque $A \subseteq B$ et $x \in A$, on a $x \in B$.

Puisque $B \subseteq C$ et $x \in B$, on a $x \in C$.

Cela montre $A \subseteq C$.

On a donc montré l'implication $(A \subseteq B \text{ et } B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$.

(iv) On procède par double implication.

- Supposons $A \subseteq B$.
  Soit $x \in E \setminus B$. On a donc $x \in E$ et $x \notin B$.
  L'élément x n'appartient alors pas à A. (Si l'on avait $x \in A$, l'inclusion $A \subseteq B$ entraînerait $x \in B$, ce qui est absurde). On a donc $x \in E$ et $x \notin A$, ce qui montre $x \in E \setminus A$.
- Pour démontrer l'inclusion réciproque, on pourrait refaire une preuve très semblable à celle que nous venons de faire. Mais on peut procéder autrement.
  On a en effet montré qu'étant donné deux ensembles $A, B \subseteq E$, on avait l'implication $E \setminus B \subseteq E \setminus A$. En appliquant cette implication aux ensembles $E \setminus B$ et $E \setminus A$, on en déduit l'implication

$$E \setminus B \subseteq E \setminus A \Rightarrow E \setminus (E \setminus A) \subseteq E \setminus (E \setminus B),$$

ce qui montre l'inclusion réciproque $E \setminus B \subseteq E \setminus A \Rightarrow A \subseteq B$.

Autocorrection D.

1. Les deux termes de l'égalité sont des parties de $\mathbb{R}$. Montrons qu'elles sont égales par double inclusion.
   - Soit $y \in \bigcup_{x \in [0,1]}]x-1, x+1[$.
     On peut trouver $x \in [0,1]$ tel que $y \in]x-1, x+1[$.
     On a alors
     - d'une part : $y < x + 1 \leqslant 2$;
     - de l'autre : $y > x - 1 \geqslant -1$,

     donc $y \in]-1, 2[$.
   - Réciproquement, soit $y \in]-1, 2[$.
     On distingue deux cas :
     - si $y \in]-1, 1[$, on a $y \in]0-1, 0+1[$, donc $y \in \bigcup_{x \in [0,1]}]x-1, x+1[$;
     - si $y \in]0, 2[$, on a $y \in]1-1, 1+1[$, donc $y \in \bigcup_{x \in [0,1]}]x-1, x+1[$.

     Comme ces deux cas recouvrent toutes les possibilités (car $]-1, 1[\cup]0, 2[=]-1, 2[$), on a montré l'inclusion réciproque, ce qui conclut la preuve.
2. On procède de la même façon pour montrer que $\bigcap_{x \in [0,1]}]x-1, x+1[=]0, 1[$.

- Soit $y \in \bigcap_{x\in[0,1]}]x-1,x+1[$.
  On a donc en particulier $y \in]0-1,0+1[=]-1,1[$ et $y \in]1-1,1+1[=]0,2[$. Cela entraîne à la fois $0 < y$ et $y < 1$, donc $y \in]0,1[$.
- Réciproquement, soit $y \in]0,1[$.
  Montrons $y \in \bigcap_{x\in[0,1]}]x-1,x+1[$, c'est-à-dire $\forall x \in [0,1], y \in]x-1,x+1[$.
  Soit $x \in [0,1]$.
  - On a $x \leqslant 1$, donc $x-1 \leqslant 0$, donc $y > x-1$.
  - De même, on a $x \geqslant 0$, donc $x+1 \geqslant 1$, donc $y < x+1$.

  Ainsi, $y \in]x-1,x+1[$.
  Cela montre $y \in \bigcap_{x\in[0,1]}]x-1,x+1[$ et conclut la preuve.

Autocorrection E.

(i) L'assertion est équivalente à $\Omega = A = B$.
En effet, supposons $\Omega = A = B$ et montrons l'assertion (i).

Soit $x \in \Omega$.

- Puisque $\Omega = A$, on a $x \in A$.
- De même, puisque $\Omega = B$, on a $x \in B$.

On a donc $x \in A$ et $x \in B$, ce qui achève la preuve de (i).

Réciproquement, supposons (i) et montrons $\Omega = A = B$.

- Soit $x \in \Omega$.
  D'après (i), on a $x \in A$ et $x \in B$. *A fortiori*, cela montre $x \in A$. On a donc l'inclusion $\Omega \subseteq A$.
- Réciproquement, on sait déjà que $A \subseteq \Omega$ (A est par définition une partie de Ω).

On a donc bien $\Omega = A$. Les parties A et B jouant des rôles parfaitement symétriques, on démontre exactement de la même façon que $\Omega = B$.

(ii) L'assertion est équivalente à $A \cup B = \Omega$.
En effet, supposons $A \cup B = \Omega$ et montrons l'assertion (ii).

Soit $x \in \Omega$.
Puisque $A \cup B = \Omega$, on a $x \in A \cup B$, c'est-à-dire $x \in A$ ou $x \in B$.

Réciproquement, supposons (ii) et montrons $A \cup B = \Omega$, par double inclusion.

- Soit $x \in A \cup B$. On distingue deux cas : si $x \in A$, on a $x \in \Omega$ car $A \subseteq \Omega$; si $x \in B$, on a $x \in \Omega$ car $B \subseteq \Omega$. Dans tous les cas, on a donc bien $x \in \Omega$.
- Réciproquement, soit $x \in \Omega$. D'après (ii), on a $x \in A$ ou $x \in B$, c'est-à-dire exactement $x \in A \cup B$.

(iii) L'assertion est équivalente à $A \subseteq B$, c'est la définition vue en cours.

(iv) L'assertion est équivalente à $A = B$, comme on le démontre facilement.

(v) L'assertion est équivalente à « A et B sont disjoints », c'est-à-dire à $A \cap B = \varnothing$.
En effet, supposons $A \cap B = \varnothing$ et montrons (v).
Soit $x \in \Omega$ tel que $x \in A$.

Puisque $A \cap B = \varnothing$, on a nécessairement $x \notin B$ (si ce n'était pas le cas, on aurait $x \in A$ et $x \in B$, donc $x \in A \cap B$, ce qui contredit directement l'hypothèse).

Réciproquement, supposons (v) et montrons $A \cap B = \varnothing$.
Pour cela, supposons par l'absurde que $A \cap B$ soit non vide.

Cela signifie qu'on peut trouver un élément $y \in A \cap B$, c'est-à-dire tel que $y \in A$ et $y \in B$.
D'après (v), puisque $y \in A$, on a $y \notin B$. Cela contredit directement ce qui précède et achève la preuve par l'absurde.

On a donc bien montré que $A \cap B = \varnothing$.

(vi) L'assertion est équivalente à $B \subseteq A$.
En effet, supposons $B \subseteq A$ et montrons (vi).
Soit $x \in \Omega$. Montrons $x \in A$ ou $x \notin B$.

Pour cela, supposons non($x \notin B$), c'est-à-dire $x \in B$.
Comme $B \subseteq A$, cela entraîne $x \in A$.

On a donc montré que non($x \notin B$) implique $x \in A$, c'est-à-dire $x \in A$ ou $x \notin B$.
Réciproquement, supposons (vi) et montrons $B \subseteq A$.
Soit $x \in B$.

D'après (vi), on a $x \in A$ ou $x \notin B$.
Comme $x \in B$, on a nécessairement $x \in A$.

Remarque. On pourrait aussi montrer, par exemple par une table de vérité, que si P et Q sont deux assertions, l'assertion P ou non Q est équivalente à $Q \Rightarrow P$. L'assertion (vi) est donc équivalente à $\forall x \in \Omega, x \in B \Rightarrow x \in A$, ce qui est la définition de $B \subseteq A$.

(vii) L'assertion est équivalente à $A \neq \Omega$.
En effet, supposons $A \neq \Omega$ et montrons (vii).

Dire que $A \neq \Omega$ revient à dire que $A \nsubseteq \Omega$ ou que $\Omega \nsubseteq A$. Comme par hypothèse A est une partie de Ω, la première assertion est impossible, donc on a nécessairement $\Omega \nsubseteq A$. On peut donc trouver un élément $x \in \Omega$ tel que $x \notin A$.
Montrons maintenant $\exists X \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\} : A \cap X = \varnothing$.
Candidat : $X = \{x\}$.

- Il s'agit bien d'une partie non vide de Ω, donc on a $X \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\}$.
- Comme $x \notin A$, on a bien $A \cap X = \varnothing$, ce qui conclut la preuve de (vii).

Réciproquement, supposons (vii) et montrons $A \neq \Omega$.

On peut donc trouver une partie $X \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\}$ telle que $X \cap A = \varnothing$.
Puisque X est non vide, on peut en trouver un élément $x \in X$.
Comme $X \cap A = \varnothing$, on a $x \notin A$.
On a donc bien trouvé un élément de Ω qui n'est pas élément de A, ce qui montre $A \neq \Omega$.

(viii) L'assertion est équivalente à $A \subseteq B$.
En effet, supposons $A \subseteq B$ et montrons (viii).

Soit $X \in \mathcal{P}(\Omega)$ telle que $X \cap A \neq \varnothing$.
On peut donc trouver un élément $x \in X \cap A$.
En particulier, $x \in A$. Comme $A \subseteq B$, on a $x \in B$.
Cela entraîne que $x \in X \cap B$, ce qui montre $X \cap B \neq \varnothing$.

Réciproquement, supposons (viii) et montrons $A \subseteq B$.

Soit $x \in A$.

Appliquons la $\forall$-assertion (viii) à la partie $X = \{x\}$ de Ω. Elle vérifie bien l'hypothèse $X \cap A \neq \varnothing$, car l'élément x appartient à la fois à X et à A.

D'après (viii), on en déduit $X \cap B \neq \varnothing$.

Par ailleurs, l'intersection $X \cap B$ est une partie de $X = \{x\}$, donc il ne peut s'agir que de $\varnothing$ ou X. Vu ce qui précède, on a nécessairement $X \cap B = \{x\}$, donc $x \in X \cap B$, donc $x \in B$, ce qui achève la preuve.

Autocorrection F.

1.
   - Montrons que l'application f est injective.
     Soit $x, x' \in \mathbb{N}$ tels que $f(x) = f(x')$.
     On a donc $2x = 2x'$. En divisant de part et d'autre par 2, on a bien $x = x'$.
   - En revanche, f n'est pas surjective. En effet, quel que soit $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$ est un entier pair, donc $1 \in \mathbb{N}$ n'est pas une valeur prise par la fonction f.
2.
   - L'application g n'est pas injective. En effet, $g(2) = g(1) = 1$.
   - Montrons que l'application g est surjective. Soit $y \in \mathbb{N}$.
     (i) Si y est impair, on a $g(y) = y$.
     (ii) Si y est pair, on a $g(2y) = y$.
     Dans tous les cas, on a $\exists x \in \mathbb{N} : g(x) = y$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - On a $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(2n) = n$ car $2n$ est pair. Ainsi, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
     Cette application est bijective.
   - Si n est pair, $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f\left(\frac{n}{2}\right) = n$.
     Si n est impair, $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n) = 2n$.

   Ainsi, on a
   $$f \circ g : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ n \mapsto & \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{cases}$$
   Cette application n'est ni injective ni surjective. On peut le voir de deux façons.
   (i) Si $f \circ g$ était injective, g serait injective. Si $f \circ g$ était surjective, f serait surjective. Comme on a vu aux deux premières questions qu'il n'en était rien, $f \circ g$ n'est ni injective ni surjective.
   (ii) Montrons les mêmes résultats à la main.
   Déjà, l'expression de $f \circ g$ montre que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $(f \circ g)(n)$ est pair. On ne peut donc pas trouver de $n \in \mathbb{N}$ tel que $(f \circ g)(n) = 1$. Ainsi, $f \circ g$ n'est pas surjective.
   Par ailleurs, $(f \circ g)(1) = (f \circ g)(2) = 2$, donc $f \circ g$ n'est pas injective.

Autocorrection G.

1. L'application f est injective. Pour le montrer, nous allons montrer
   $$\forall x, x' \in \mathbb{N}, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$
   par contraposée, c'est-à-dire que nous allons montrer
   $$\forall x, x' \in \mathbb{N}, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$
   Soit $x, x' \in \mathbb{N}$ tels que $x \neq x'$.

- ► Si $x > x'$, la stricte croissance de f entraîne $f(x) > f(x')$.
- ► Si $x' > x$, la stricte croissance de f entraîne $f(x') > f(x)$.

Dans tous les cas, nous avons bien $f(x) = f(x')$.

Remarque. Nous avons en fait démontré un résultat plus général, à savoir que toute application strictement croissante est injective.

En revanche, f n'est pas surjective. En effet, on a $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $\forall n \geqslant 2, f(n) \geqslant 4$, donc il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 3$.

2. D'après ce qui précède, il n'existe pas d'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. En effet, puisque $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ est surjectif, cela entraînerait la surjectivité de f, que nous avons exclue.

Par ailleurs, considérons

$$h : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ n \mapsto & \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } n \text{ est un carré parfait} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Il s'agit d'une application bien définie ($\sqrt{n}$ est bien un élément de $\mathbb{N}$ dès que n est un carré parfait). La composée $h \circ f$ est alors bien une application $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} (h \circ f)(n) &= h\left(f(n)\right) \\ &= h(n^2) \\ &= \sqrt{n^2} && \text{car } n^2 \text{ est un carré parfait} \\ &= n && \text{car } n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.