Ensembles et applications

Ensembles

Opérations booléennes

Autocorrection A. ☑

Soit E et F deux ensembles. En revenant aux définitions de l'égalité et de l'inclusion, écrire des assertions quantifiées équivalentes à $E \not\subseteq F$ et à $E \neq F$.

Autocorrection B. ☑

Décrire explicitement $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$. Exprimer chacun de ses éléments à partir de $A = \{1,2\}$ et $B = \{2,3\}$ en utilisant les opérations $\cup$, $\cap$ et $\setminus$.

Autocorrection C. ☑

Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ des parties de cet ensemble. Montrer les assertions suivantes.

(i) $A \cup (E \setminus A) = E$;

(ii) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$;

(iii) $(A \subseteq B \text{ et } B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$;

(iv) $A \subseteq B \Leftrightarrow E \setminus B \subseteq E \setminus A$.

Exercice 1.

Soit $a < b < c < d$ quatre réels.

En faisant des dessins, décrire sans démonstration les ensembles suivants.

(i) $[a, c] \cup [b, d]$;

(ii) $[a, c] \cap [b, d]$;

(iii) $[a, b] \cap [c, d]$;

(iv) $[a, c] \setminus [b, d]$;

(v) $[a, d] \setminus [b, c]$;

(vi) $[b, c] \setminus [a, d]$.

Exercice 2.

Soit Ω un ensemble et $A, B, C \subseteq \Omega$ trois parties. On note $\overline{A} = \Omega \setminus A$ le complémentaire de A, et ainsi de suite. Simplifier les expressions suivantes.

(i) $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$;

(ii) $A \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

Exercice 3. ☑

Soit Ω un ensemble. Si A et B sont des parties de Ω, on définit leur *différence symétrique*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Illustrer cette notion sur un diagramme de Venn.
2. Montrer
$$\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$
3. Montrer les propriétés suivantes.
   (i) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), A \triangle A = \varnothing$;
   (ii) $\exists E \in \mathcal{P}(\Omega) : \forall A \in \mathcal{P}(\Omega), A \triangle E = A$;
   (iii) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \exists B \in \mathcal{P}(\Omega) : A \triangle B = \varnothing$.

Familles d'ensembles

Autocorrection D.

1. Montrer $\displaystyle\bigcup_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[=]-1, 2[$.
2. Que vaut $\displaystyle\bigcap_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$?

Exercice 4 (Tout ensemble est une union de singletons).

Soit E un ensemble. Montrer que $E = \displaystyle\bigcup_{x\in E}\{x\}$.

Exercice 5.

Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de $\mathbb{R}$. On définit leurs *limites inférieure et supérieure*

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geqslant n} E_k \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geqslant n} E_k.$$

1. Montrer que $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$.
2. Calculer $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ dans le cas de la famille $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} = ([n, +\infty[)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Même question dans le cas de la famille $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left[(-1)^n n, +\infty\right[\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Produit cartésien

Exercice 6.

Soit A, B et C trois ensembles non vides tels que $A \times B \subseteq B \times C$. Montrer que $A \subseteq C$.

Exercice 7$^+$.

Soit Ω un ensemble et $E, F \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $E \times F \subseteq (F \times \Omega) \cup (\Omega \times E)$. Montrer que $E \subseteq F$ ou $F \subseteq E$.

Ensemble des parties

Exercice 8.

Soit $E = \{0, 1, 2\}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

(i) $E \in \mathbb{N}$;	(iv) $E \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$;	(vii) $\{1\} \in E$;	(x) $\varnothing \subseteq E$;
(ii) $E \subseteq \mathbb{N}$;	(v) $1 \in E$;	(viii) $\{1\} \subseteq E$;	(xi) $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$;
(iii) $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$;	(vi) $1 \subseteq E$;	(ix) $\varnothing \in E$;	(xii) $\{\varnothing\} \subseteq E$.

Exercice 9.

Soit Ω un ensemble et $A, B \subseteq \Omega$ deux parties. Les ensembles $\mathcal{P}(A \cap B)$ et $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ sont-ils égaux ? Même question pour $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Exercice 10$^+$.

On dit que deux parties de $[\![1, n]\!]$ sont *adjacentes* si l'on passe de l'une à l'autre en ajoutant ou en supprimant un unique élément.

1. Montrer qu'il est possible de lister les parties de $[\![1, n]\!]$ sous la forme $A_0, A_1, \ldots, A_{2^n-1}$ de telle sorte que pour tout $k \in [\![1, 2^n - 1]\!]$, A_{k-1} et A_k soient adjacentes et, qu'en outre A_{2^n-1} et A_0 soient adjacentes.
2. Montrer qu'on peut imposer en outre $A_0 = \varnothing$ et $\forall k \in [\![1, n]\!], A_k = [\![1, k]\!]$.

Implications et équivalences

Autocorrection E.

Soit Ω un ensemble et $A, B \subseteq \Omega$ deux parties. Donner des assertions simples équivalentes aux assertions suivantes.

(i) $\forall x \in \Omega, x \in A$ et $x \in B$;

(ii) $\forall x \in \Omega, x \in A$ ou $x \in B$;

(iii) $\forall x \in \Omega, x \in A \Rightarrow x \in B$;

(iv) $\forall x \in \Omega, x \in A \Leftrightarrow x \in B$;

(v) $\forall x \in \Omega, x \in A \Rightarrow x \notin B$.

(vi) $\forall x \in \Omega, x \in A$ ou $x \notin B$.

(vii) $\exists X \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\}, A \cap X = \varnothing$.

(viii) $\forall X \in \mathcal{P}(\Omega), X \cap A \neq \varnothing \Rightarrow X \cap B \neq \varnothing$.

Exercice 11.

Soit X un ensemble et $P(x)$ une assertion dépendant d'un élément $x \in X$. Donner une assertion équivalente à $\forall x \in \{z \in X \,|\, P(z)\}, Q(x)$.

Exercice 12.

Soit X un ensemble. Montrer $\forall x, y \in X, \Big(x = y \Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{P}(X), x \in A \Rightarrow y \in A)\Big)$.

Exercice 13.

Soit Ω un ensemble et $A, B, C \subseteq \Omega$ trois parties. On note $\overline{A} = \Omega \setminus A$ le complémentaire de A, et ainsi de suite. Montrer les équivalences suivantes.

(i) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$;

(ii) $B \subseteq C \Leftrightarrow (A \cup B \subseteq A \cup C$ et $A \cap B \subseteq A \cap C)$;

(iii) $B = C \Leftrightarrow (A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C)$;

(iv) $A \subseteq B \subseteq C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$;

(v) $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$;

(vi) $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{P}(\Omega), A \cap X \subseteq B \cap X$.

Exercice 14.

Soit $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Montrer les assertions suivantes.

(i) $A = (A \cap \{2n \,|\, n \in \mathbb{N}\}) \cup (A \cap \{2n + 1 \,|\, n \in \mathbb{N}\})$;

(ii) $A = B \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, A \cup \{n\} = B \cup \{n\})$;

(iii) $A = B \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, A \cap [\![0, n]\!] = B \cap [\![0, n]\!])$.

La dernière assertion est-elle vraie si l'on remplace les deux symboles d'intersection par des unions ?

Mélange

Exercice 15.

Soit $A \subseteq \mathbb{Z}$ une partie non vide telle que $\forall n \in \mathbb{Z}, n \in A \Rightarrow (n - 1 \in A$ et $n + 1 \in A)$.

Montrer que $A = \mathbb{Z}$.

Exercice 16$^+$.

Soit Ω un ensemble et $A, B \subseteq \Omega$ deux parties.

1. Le but de cette question est de résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire de déterminer toutes les parties $X \subseteq \Omega$ telles que $A \cup X = B$.
   (i) Donner une condition simple sur A et B équivalente à $\exists X \in \mathcal{P}(\Omega) : A \cup X = B$.
   (ii) On suppose dans cette question que la condition de la question précédente est remplie. Montrer que les ensembles $X \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cup X = B$ sont exactement les ensembles vérifiant $B \setminus A \subseteq X \subseteq B$.
2. Résoudre, de manière analogue, l'équation $A \cap X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Exercice 17.

Étant donné deux parties A et B de $\mathbb{R}$, on définit $A \boxplus B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Dans le cas particulier où $A = \{0, 1\}$ et $B = \{1, 4\}$, déterminer $A \boxplus B$.
2. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ non vide. Montrer $A \boxplus \mathbb{R} = \mathbb{R}$.
3. (a) Montrer $\forall A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), (A_1 \cap A_2) \boxplus B \subseteq (A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B)$.
   (b) L'assertion $\forall A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), (A_1 \cap A_2) \boxplus B = (A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B)$ est-elle vraie ?

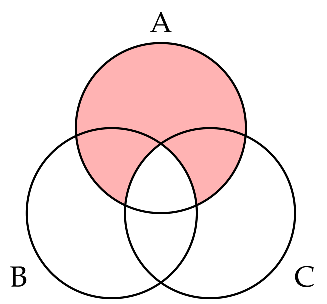
Exercice 18.

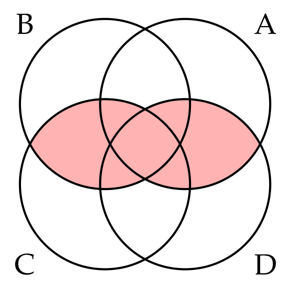
Pour toute partie $E \subseteq \mathbb{R}^2$, on définit $\widehat{E} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ et $\check{E} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}, (x, y) \in E\}$.

1. Dessiner $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy \leqslant 1\right\}$, puis déterminer précisément $\widehat{H}$ et $\check{H}$.
2. (a) Montrer $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$.
   (b) Montrer $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \widehat{A \cap B} \subseteq \widehat{A} \cap \widehat{B}$.
   (c) Montrer que dans la question précédente, on ne peut pas remplacer l'inclusion par une égalité.
3. Énoncer et démontrer des propriétés analogues pour l'opération $\check{\ }$.

Exercice 19.

Voici deux diagrammes de Venn.





1. Le premier diagramme semble indiquer qu'étant donné trois ensembles A, B et C, on a l'égalité $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (A \cap B \cap C)$. Démontrer cette égalité.
2. Le second diagramme semble indiquer qu'étant donné quatre ensembles A, B, C et D, on a l'égalité $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap D) \cup (B \cap C)$.
   (a) Convainquez-vous (par un argument de symétrie) qu'une telle égalité est surprenante.
   (b) Montrer, par un exemple, que l'égalité est fausse.
   (c) Pourquoi le diagramme de Venn nous a-t-il induits en erreur ?

Applications

Exercice 20.

Soit E et F deux ensembles et $f, g : E \to F$. On suppose que $\forall x, y \in E, \big(f(x) = f(y)\big)$ ou $\big(g(x) = g(y)\big)$.

Montrer qu'au moins l'une des deux applications f et g est constante.

Exercice 21.

Soit Ω un ensemble et $A, B \subseteq \Omega$. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions indicatrices de parties de Ω que l'on précisera.

(i) $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$;
(ii) $\max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$;
(iii) $\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$;
(iv) $1 - \mathbb{1}_A$;
(v) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$;
(vi) $(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$.

Injectivité, surjectivité, bijectivité – exemples

Autocorrection F.

1. L'application $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{cases}$ est-elle injective ? surjective ?
2. Mêmes questions pour l'application $g : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{cases}$
3. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles injectives ? surjectives ?

Autocorrection G.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto x^2. \end{cases}$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. Existe-t-il $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$? Existe-t-il $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$?

Exercice 22.

Déterminer si les applications suivantes sont injectives (resp. surjectives, bijectives).

(i) $\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$;
(ii) $\begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$;
(iii) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (y, x) \end{cases}$;
(iv) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 3y \end{cases}$;
(v) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (y, 0, y - x) \end{cases}$;
(vi) $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ z \mapsto z^2 + z + 1 \end{cases}$;
(vii) $\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2 + z + 1 \end{cases}$;
(viii) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, xy) \end{cases}$;
(ix) $\begin{cases} \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, xy) \end{cases}$;
(x) $\begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n + (-1)^n \end{cases}$;
(xi) $\begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(0) \end{cases}$;
(xii) $\begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(0) \end{cases}$;
(xiii) $\begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}_+) \\ X \mapsto X \cap \mathbb{R}_+. \end{cases}$

Exercice 23.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ n \mapsto \max(0, n-1). \end{cases}$

1. Montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
2. Peut-on en déduire que l'application g est la réciproque de f ?

Exercice 24.

On note $\pi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ la fonction qui associe à tout entier n le nombre de nombres premiers appartenant à l'intervalle entier $[\![1, n]\!]$.

La fonction π est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 25^{+}.

Déterminer si la fonction $\sin : \mathbb{Q} \to [-1, 1]$ est injective et/ou surjective.

Exercice 26.

Soit E et F deux ensembles non vides et G un ensemble ayant au moins deux éléments. Soit $f : E \to F$. On considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} G^F \to & G^E \\ g \mapsto & g \circ f. \end{cases}$$

1. Montrer que φ est injective si et seulement si f est surjective.
2. Montrer que φ est surjective si et seulement si f est injective.

Exercice 27.

Soit Ω un ensemble et $X, Y \subseteq \Omega$. On considère l'application

$$\psi : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \to & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \\ A \mapsto & (X \cap A, Y \cap A). \end{cases}$$

Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur X et Y pour que ψ soit injective (resp. surjective).

Quand ψ est bijective, exhiber sa réciproque.

Exercice 28^{++}.

1. Soit $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ deux bijections. Montrer que $\begin{cases} \mathbb{Z} \to & \mathbb{Z} \\ k \mapsto & f(k)\,g(k) \end{cases}$ n'est pas bijective.
2. Peut-elle être injective ?

Injectivité, surjectivité, bijectivité – théorie

Exercice 29.

Soit E et F deux ensembles, et $A \subseteq E$. Soit $f : E \to F$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (on justifiera par une preuve ou un contre-exemple).

- Si f est injective, alors $f_{|A}$ est injective.
- Si $f_{|A}$ est injective, alors f est injective.
- Si f est surjective, alors $f_{|A}$ est surjective.
- Si $f_{|A}$ est surjective, alors f est surjective.

Exercice 30.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement monotone, alors f est injective.

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 31.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective.

1. Montrer que f est impaire si et seulement si f^{-1} l'est.
2. A-t-on le même résultat pour la parité ?

Exercice 32.

Soit E, F, G, H quatre ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications.

Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 33$^+$.

Soit E un ensemble, $n > 1$ un entier et $f : E \to E$ telle que $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ soit égale à f.

1. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.
2. On fixe $n = 2$. À quelle condition f est-elle injective ?

Exercice 34$^+$.

Soit X et Y deux ensembles non vides et $f : X \to Y$.

(i) Montrer que f est injective si et seulement s'il existe $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

(ii) Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe $h : Y \to X$ telle que $f \circ h = \mathrm{id}_Y$.

Exercice 35$^+$.

Soit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux applications telles que f soit injective, g soit surjective et $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leqslant g(n)$.

Montrer que $f = g$.

Images directe et réciproque

Exercice 36.

1. Déterminer $\sin[A]$, dans les cas $A = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, [0, 2\pi], [-\pi, \pi], [0, \pi/2], [-\pi, \pi/2]$.
2. Déterminer $\sin^{-1}[B]$ dans les cas $B = [-1, 1], [0, 1], [3, 4], \mathbb{R}, \{1\}, \{-1, 1\}$.

Exercice 37.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x^2 - 4x + 1. \end{cases}$

1. La fonction f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que f est injective sur $[1, +\infty[$. En déduire que f induit une bijection de $[1, +\infty[$ sur son image (que l'on précisera) et déterminer son application réciproque.
3. Déterminer $f\Big[[0,1]\Big]$, $f[\mathbb{R}_-]$, $f[\mathbb{R}_+]$, $f\Big[[-2,2]\Big]$, $f^{-1}[\{1\}]$, $f^{-1}[\{-1\}]$, $f^{-1}\Big[[0,1]\Big]$, $f^{-1}\Big[[-2,1]\Big]$.

Exercice 38.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z + \dfrac{1}{z}. \end{cases}$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer $f[\mathbb{R}^*]$ et $f[\mathbb{U}]$.

Exercice 39.

Soit X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Pour tout $y \in Y$, on définit $A_y = f^{-1}[\{y\}] \subseteq X$. Montrer que la famille $(A_y)_{y \in Y}$ est un recouvrement disjoint de E.

Expliciter (et dessiner) ce recouvrement dans les cas

$$m : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ z \mapsto |z|, \end{cases} \qquad \alpha : \begin{cases} \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z}{|z|} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \text{Ré} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}.$$

Exercice 40. ☑

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1. \end{cases}$ Déterminer les parties $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ stables sous f.

Exercice 41.

Soit X un ensemble et $f : X \to X$ une application. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X.

1. Montrer que si, pour tout $i \in I$, A_i est stable sous f, il en va de même de $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ et $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
2. Est-il vrai en général que si $A \subseteq X$ est stable sous f, alors $X \setminus A$ l'est également ?

Exercice 42. ☑

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$.
2. Montrer que f est bijective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E), f[E \setminus A] = F \setminus f[A]$.

Exercice 43$^+$.

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

1. Soit $A \subseteq E$. Montrer que $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ et donner un exemple prouvant qu'il n'y a pas toujours égalité.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}[f[A]] = A$.
3. Soit $B \subseteq F$. Montrer que $f\left[f^{-1}[B]\right] \subseteq B$ et donner un exemple prouvant qu'il n'y a pas toujours égalité.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si $\forall B \in \mathcal{P}(F), f\left[f^{-1}[B]\right] = B$.

Exercice 44$^+$.

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$. On considère les applications

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F) \\ X \mapsto f[X] \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \psi : \begin{cases} \mathcal{P}(F) \to P(E) \\ Y \mapsto f^{-1}[Y]. \end{cases}$$

1. Montrer les équivalences f injective $\Leftrightarrow$ φ injective $\Leftrightarrow$ ψ surjective.
2. Montrer les équivalences f surjective $\Leftrightarrow$ φ surjective $\Leftrightarrow$ ψ injective.

Ensembles finis, équipotence

Ensembles finis (et infinis)

Exercice 45.

Montrer que toute suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire.

Exercice 46.

Soit $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$. Pour tout $j \in [\![1, r]\!]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_j(n) = |A_j \cap [\![0, n]\!]|$. Montrer que $(A_1, \dots, A_r)$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, a_1(n) + \cdots + a_r(n) = n$.

Exercice 47$^+$ (Quelques propriétés du maximum, et principe des tiroirs).

1. Montrer que si $n \geqslant 1$ est un entier et que $x_1, \dots, x_n$ sont des réels, on a l'inégalité
$$\min(x_1, \dots, x_n) \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leqslant \max(x_1, \dots, x_n).$$
2. Soit $m > n$ deux entiers et $f : [\![1, m]\!] \to [\![1, n]\!]$.
En considérant la famille $(x_j)_{j=1}^n = \left(f^{-1}\left[\{j\}\right]\right)_{j=1}^n$, montrer que f ne peut pas être injective.
3. Sur un réseau social, chaque inscrit peut être ami avec tout autre inscrit (mais pas avec lui-même). La relation d'amitié est symétrique. Montrer qu'il existe deux inscrits ayant le même nombre d'amis.

Exercice 48^{++}.

Soit X un ensemble. Montrer que X est infini si et seulement si $\forall f \in X^X, \exists A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing, X\}, f[A] \subseteq A$.

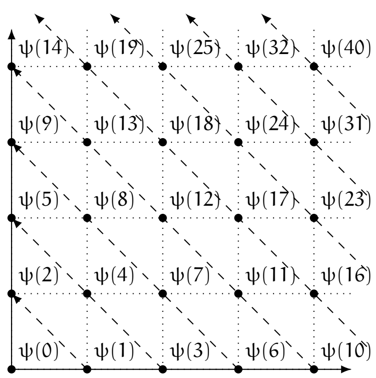
Exercice 49^{++}.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles telle que $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ et $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$. En notant $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$, on suppose $\forall X \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}), \exists n \in \mathbb{N} : X \cap A_n \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$.

Montrer $\exists n \in \mathbb{N} : A_n = \mathbb{N}$.

Équipotence

Exercice 50$^+$.



1. Montrer que $\varphi : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (a, b) & \mapsto & 2^a(2b+1) - 1 \end{cases}$ est une bijection.
2. Trouver une formule pour la bijection $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ illustrée ci-contre (et montrer précisément sa bijectivité).
3. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{N}^r$ est équipotent à $\mathbb{N}$.
4. On note $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui sont *presque nulles* (ou *nulles à partir d'un certain rang*), c'est-à-dire telles que $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, u_n = 0$.
Montrer que $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ est équipotent à $\mathbb{N}$.
5. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ de toutes les suites à valeurs dans $\mathbb{N}$ n'est pas équipotent à $\mathbb{N}$.

Exercice 51$^+$.

1. Construire une bijection $]0,1[\to]0,1]$.
2. Soit Ω un ensemble, $\omega \in \Omega$ et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que A est équipotent à $A \cup \{\omega\}$ si et seulement si A est infini ou $\omega \in A$.

Exercice 52$^+$.

Soit E, F, G trois ensembles.

1. **Curryfication.**
   (a) Pour toute application $\varphi : F \times G \to E$ et tout $x \in F$, on peut considérer l'application « partielle » $\varphi(x,-) : \begin{cases} G \to & E \\ y \mapsto & \varphi(x,y). \end{cases}$
   Utiliser cette idée pour définir une bijection $E^{F\times G} \to \left(E^G\right)^F$.
   (b) En « passant au cardinal », quelle formule sur les puissances retrouve-t-on ainsi ?
2. **Propriété universelle du produit.**
   (a) Construire une bijection entre $F^E \times G^E$ et $(F \times G)^E$.
   (b) En « passant au cardinal », quelle formule sur les puissances retrouve-t-on ainsi ?

Exercice 53^{+++}.

1. Trouver une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que $\forall n, m \in \mathbb{N}, A_n \subseteq A_m \Rightarrow n = m$.
2. Trouver une famille $(B_X)_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ d'éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que $\forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), A_X \subseteq A_Y \Rightarrow X = Y$.
3. Trouver une famille $(C_X)_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ d'élements de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que, pour tous $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, si la différence symétrique $C_X \triangle C_Y = (C_X \setminus C_Y) \cup (C_Y \setminus C_X)$ est finie, alors $X = Y$.