Sommes et produits

Exercice 3.

On essayera, dans les trois cas, de reconnaître une somme télescopique.

Exercice 8.

1. L'une des deux façons est claire : on peut remarquer que les $n+1$ premiers termes de la somme S_{n+1} constituent la somme S_n, ce qui prouve $S_{n+1} = S_n + (n+1)q^{n+1}$.
   Par ailleurs, à l'aide d'un changement de variables, on obtiendra la relation
   $$S_{n+1} = \sum_{\ell=0}^{n} q^{\ell+1} + qS_n.$$

Exercice 19.

1. On pourra chercher à comprendre le résultat sur le triangle de Pascal.
2. Pour le deuxième calcul, on prendra son courage à deux mains et on exprimera k^3 en fonction (entre autres) de $\binom{k}{3}$.

Exercice 24.

Pour la première question, on fera un dessin d'une « grille » $(n+1) \times (n+1)$ pour comprendre ce qu'il se passe.

Exercice 26.

L'hypothèse de croissance entraîne que, pour tous i, j, les deux différences $a_i - a_j$ et $b_i - b_j$ ont le même signe. Que faire de cette information ?

Autocorrection

Autocorrection A.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}\right) - \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \text{(Chasles)} \\ &= a_{n+1}. \end{aligned}$$
   On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = S_n - S_{n-1}$. Par ailleurs, on a clairement $a_0 = S_0$.
2. On a

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k = S_{n+1}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} a_k = S_{2n} - S_n$;

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2a_k = 2S_n$;

(iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k - 1) = S_n - n - 1$;

(v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k - k) = S_n - \frac{n(n+1)}{2}$.

Autocorrection B.

(i) On a, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0.$$

(ii) On a, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k 1^{n-k} = \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^n = 2^{-n}.$$

(iii) On a, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{2k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k 1^{n-k} = (4+1)^n = 5^n.$$