Sommes et produits

Généralités

Autocorrection A.

On considère deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(S_n)_{n\geqslant 0}$ reliées par la relation

$$\forall n \geqslant 0, S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer a_n en fonction des valeurs de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide des valeurs de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ les sommes suivantes :

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k$; (ii) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} a_k$; (iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2a_k$; (iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k - 1)$; (v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k - k)$.

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k$; (iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k$; (v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$; (vii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$;

(ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} k$; (iv) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} 2k$; (vi) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} 2^k$; (viii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}$.

Exercice 2.

Soit $n \geqslant 1$ et $x_1, x_2, \dots, x_n$ des nombres réels. Pour quel $\xi \in \mathbb{R}$ a-t-on $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k - \xi) = 0$?

Exercice 3.

Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, k!$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - 1}$.

Exercice 4.

Utiliser la somme télescopique $(n+1)^4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right]$ pour obtenir une formule pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$.

Exercice 5.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner des expressions simples pour les produits suivants.

(i) $\displaystyle\prod_{k=-1000}^{1000}(n^2-n)$; (iv) $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n}k^2$; (vii) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}2^k$; (x) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k}$;

(ii) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)$; (v) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k+1)$; (viii) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$; (xi) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k^2-1)$;

(iii) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k^2$; (vi) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}e^{-k}$; (ix) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$; (xii) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k(n+1-k))$.

Exercice 6.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![1,n]\!], \left(u_1 u_2 \cdots u_k\right)^n \leqslant \left(u_1 u_2 \cdots u_n\right)^k.$$

Somme géométrique

Exercice 7.

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in]1,+\infty[, \dfrac{a^n-1}{a-1} \leqslant n a^{n-1}$.

Exercice 8$^+$.

Le but de cet exercice est de déterminer, de trois façons différentes, la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k\, q^k,$$

pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Exprimer de deux façons différentes S_{n+1} en fonction de S_n, et en déduire la valeur de S_n.
2. Calculer $(q-1)S_n$ et en déduire la valeur de S_n.
3. On considère la fonction
$$\begin{aligned}\sigma : \mathbb{R}\setminus\{1\} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k.\end{aligned}$$
Donner une formule pour la dérivée σ', et en déduire la valeur de S_n.

Coefficients binomiaux, binôme de Newton

Autocorrection B.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\binom{n}{k}}{2^k}, \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n}2^{2k}\binom{n}{k}.$$

Exercice 9.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30}$ est un entier.

Exercice 10. ☑

Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$. Combien vaut cette somme ?

Exercice 11. ☑

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer

$$\forall p \in [\![0, n]\!], \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \qquad \text{et} \qquad \forall p \in [\![1, n]\!], \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 0.$$

Exercice 12.

On rappelle que les nombres de Fibonacci $(F_n)_{n \geqslant 1}$ sont définis par

$$F_1 = F_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}.$$

Exercice 13$^+$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} (-1)^k$.

Exercice 14$^+$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $2\dbinom{2p+1}{p+1} = \dbinom{2p+2}{p+1}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k}$.

   Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = 2S_n$, et en déduire l'expression de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 15 (Unimodalité des coefficients binomiaux). ☑

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le sens de variation de la famille $\left(\dbinom{n}{k}\right)_{k=0}^{n}$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dbinom{2n}{n} \geqslant \dfrac{2^{2n}}{2n+1}$.

Exercice 16.

Soit $k \geqslant 1$ un entier. Montrer que le produit de k entiers consécutifs est toujours divisible par $k!$.

Exercice 17 (Formule d'absorption et conséquences). ☑

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. **Formule d'absorption.** Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$, de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, 2^k \binom{k}{n}$ et de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 18.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En dérivant de deux façons différentes la fonction $x \mapsto (x+1)^n$, trouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
2. Par une méthode analogue, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

Exercice 19$^+$ (Sommation de l'indice du haut, et conséquences).

1. Soit n et p des entiers tels que $n \geqslant p \geqslant 0$. Montrer la *formule de sommation de l'indice du haut* :
$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$
2. Soit $n \geqslant 1$. Déduire de ce qui précède $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$.

Sommes doubles, produits doubles

Calcul

Exercice 20.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

(i) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 1$;

(ii) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i$;

(iii) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i$;

(iv) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)$;

(v) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2$;

(vi) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$;

(vii) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (j-i)$;

(viii) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (j-i)$;

(ix) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |j-i|$;

(x) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}$;

(xi) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$;

(xii) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i^2}{j}$;

(xiii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i,j)$;

(xiv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$;

(xv) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 3^{i+j}$.

Exercice 21.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression simple pour les produits suivants.

(i) $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j}$;

(ii) $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^{j}$;

(iii) $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$.

Exercice 22$^+$.

Soit $n \geqslant 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{(i,j,k)\in[\![1,n]\!]^3} \min(i,\max(j,k))$.

Applications à des sommes simples

Exercice 23.

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on note $S_n^{(p)} = \sum_{i=0}^{n} i^p$.

1. Soit $n, p \in \mathbb{N}$.
   En simplifiant de deux façons la somme $\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} i^p$, montrer la *formule d'al-Haytham* (965-1039) :
   $$n\, S_n^{(p)} - S_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} S_k^{(p)}.$$
2. En déduire une formule pour la suite $(S_n^{(4)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 24.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2}$ une famille de nombres. Montrer que
   $$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} a_{i,j} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1} + \sum_{j=1}^{n} a_{n+1,j} + a_{n+1,n+1}.$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$. (On a donc $S_0 = 0$).
   En calculant de deux façons (dont l'une utilise la question précédente) la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$.

Exercice 25.

Soit $n \geqslant 1$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geqslant n^2.$$

Exercice 26$^+$ (Inégalité monotone de Čebyšëv).

Soit n un entier et $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ deux familles croissantes indexées par $[\![1, n]\!]$. Montrer
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j\right).$$

Applications définies par des sommes

Exercice 27.

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'entiers naturels (c'est-à-dire un élément de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$). On définit la fonction

$$S : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ n \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_{n\geqslant 0}$ pour que la fonction f soit injective (resp. surjective, bijective).

Exercice 28^{+}.

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de nombres entiers strictement positifs. On considère l'application

$$\psi : \begin{cases} \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \to & \mathbb{N} \\ \quad A \quad \mapsto & \displaystyle\sum_{n\in A} w_n. \end{cases}$$

1. **Surjectivité.**
   (a) On suppose ψ surjective. Montrer qu'alors
   $$w_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, w_{k+1} \leqslant w_0 + \cdots + w_k + 1. \tag{✠}$$
   (b) Réciproquement, on suppose les conditions (✠) vérifiées. Montrer que ψ est surjective.
2. **Bijectivité.** Dans cette question, on suppose les conditions (✠) respectées, de telle sorte que ψ soit déjà surjective.
   Montrer qu'alors ψ est bijective si et seulement si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.