Nombres complexes

Exercice 2.

Une possibilité pour attaquer l'exercice est d'utiliser l'équivalence

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}, \zeta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\zeta} = \zeta.$$

Exercice 3.

On pourra montrer que l'assertion est fausse par l'absurde.

Une fois définis deux nombres complexes a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{z} = az + b$, on pourra essayer d'obtenir de plus en plus de contraintes sur a et b, jusqu'à parvenir à une contradiction.

Exercice 7.

On peut en fait déterminer, en fonction de m, toutes les solutions réelles de (E_m).

Exercice 11.

Les deux questions sont en fait plus similaires qu'elles n'en ont l'air.

Exercice 16.

On pourra procéder par l'absurde et utiliser l'inégalité triangulaire.

Exercice 17.

On pourra commencer par linéariser les expressions $\cos^2(k\theta)$ et $\sin^2(k\theta)$.

Exercice 23.

On pourra reconnaître une somme dans le quotient $\dfrac{1-z^n}{1-z}$.

Exercice 24.

On pourra commencer par exprimer a et b en fonction de $a \pm b$.

Exercice 26.

Deux pistes possibles :

1. Démontrer et utiliser l'inégalité (importante) $\forall a, b \in \mathbb{R}, 2ab \leqslant a^2 + b^2$.
2. Exprimer le terme de gauche comme un produit scalaire et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 28.

On pourra développer $|a \pm b|^2$, comme dans le cours.

Exercice 29.

On pourra utiliser le canevas standard pour montrer une assertion de la forme P ou Q.

Comment exploiter une hypothèse comme $z \in \mathbb{U}$ et $|z+1| < 1$?

Exercice 31.
On pourra commencer par traiter le cas $x = 0$.

Exercice 32.
On pourra utiliser l'égalité $\forall z \in \mathbb{C}, |z|^2 = \bar{z}\, z$, puis développer.

Exercice 33.
On pourra chercher à montrer que
$$|a-b|^2 < |1-\overline{a}b|^2 .$$

Exercice 36.

1. Il est assez clair que $\sqrt{2}$ est une constante adaptée au cas $n = 2$. D'une certaine façon, la clef est de comprendre pourquoi elle est également adaptée à $n = 3$.
2. En notant $\rho_k = |z_k|$ et $\theta_k = \arg(z_k)$, montrer $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \max\limits_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^n} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k\, u_k \right| \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \rho_k\, |\cos(\theta_k - \alpha)|$.

Exercice 38.
Pour déterminer géométriquement la transformation $z \mapsto f(z)$ définie par une formule, une bonne idée est de commencer par trouver l'ensemble de ses *points fixes*
$$\mathrm{Fix}(f) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f(z) = z\} .$$

Exercice 43.
On pourra commencer par traiter le cas $a = 1$.

Exercice 44.
On veillera à être soigneux sur le signe des cosinus et sinus que l'on calcule.

Exercice 48.
Deux méthodes possibles :

- dans le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$, on peut chercher des « simplifications », c'est-à-dire des groupes de termes dont le produit fait 1 ; un dessin peut aider !
- un calcul peu subtil, par exemple en utilisant le fait que
$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i \frac{2\pi}{n} k} \,\middle|\, k \in [\![0, n-1]\!] \right\} .$$

Exercice 55.
Pour les deux dernières questions, on pourra par exemple procéder par analyse et synthèse.

Dans la phase d'analyse, une fois défini un nombre complexe z vérifiant la relation, on pourra chercher à réexprimer ladite relation en fonction de $w = e^z$.

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) La forme algébrique est $-i$. Le module est 1.

(ii) La forme algébrique est i. Le module est 1.

(iii) La forme algébrique est $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. Le module est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(iv) La forme algébrique est $-\frac{11}{5}+\frac{19}{10}i$. Le module est $\frac{13}{10}\sqrt{5}$.

(v) La forme algébrique est i. Le module est 1.

(vi) La forme algébrique est $-\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i$. Le module est $\frac{2}{5}$.

(vii) La forme algébrique est -3. Le module est 3.

(viii) La forme algébrique est $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Le module est 1.

(ix) La forme algébrique est $-16+24i$. Le module est $8\sqrt{13}$.

Autocorrection B.

On résout ces équations en revenant à la forme algébrique.

(i) $z=-8+i$;

(ii) $z=\frac{3}{8}-\frac{i}{2}$;

(iii) il n'y a pas de solution.

Autocorrection C.

On applique la méthode vue en cours.

(i) $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

(ii) $\pm(2-i)$;

(iii) $\pm(3-i)$;

(iv) $\pm(5-i)$;

(v) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Autocorrection D.

(i) $z\in\{j,\bar{j}\}$;

(ii) $z\in\{1+3i,-1-i\}$;

(iii) $z\in\{1,-1+2i\}$

(iv) $z\in\left\{\frac{1}{2}-i,\frac{7}{2}+i\right\}$;

(v) $z\in\{\pm(3-2i),\pm(1-i)\}$;

(vi) $z\in\left\{\pm i,\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{m}}+i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{m}}\right)\right\}$.

Autocorrection E.

(i) $(x,y)\in\{(1+i,1-i),(1-i,1+i)\}$;

(ii) $(x,y)\in\{(-1,3i+1),(3i+1,-1)\}$;

(iii) $(x,y)\in\{(5i,3-i),(3-i,5i)\}$;

(iv) $(x,y) \in \left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{\left(1+\sqrt{\sqrt{17}-4}\right) + i\left(1+\sqrt{\sqrt{17}+4}\right)}{2}, \dfrac{\left(1-\sqrt{\sqrt{17}-4}\right) + i\left(1-\sqrt{\sqrt{17}+4}\right)}{2} \right), \\ \left(\dfrac{\left(1-\sqrt{\sqrt{17}-4}\right) + i\left(1-\sqrt{\sqrt{17}+4}\right)}{2}, \dfrac{\left(1+\sqrt{\sqrt{17}-4}\right) + i\left(1+\sqrt{\sqrt{17}+4}\right)}{2} \right) \end{array} \right\}.$

Autocorrection F.

(i) $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$;

(ii) $i = e^{i\pi/2}$;

(iii) $1 + j = -j^2 = e^{i\pi/3}$;

(iv) $\begin{cases} 2\left(\cos\dfrac{3\theta}{2}\right) e^{i\,3\theta/2} & \text{si } \cos\dfrac{3\theta}{2} \geqslant 0 \\ 2\left|\cos\dfrac{3\theta}{2}\right| e^{i(\pi+3\theta/2)} & \text{sinon.} \end{cases}$

(v) $e^{\cos\theta}\, e^{i\sin\theta}$;

(vi) $\begin{cases} 2\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\right) e^{i\,\theta/2} & \text{si } \cos\dfrac{\theta}{2} \geqslant 0 \\ 2\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right| e^{i(\pi+\theta/2)} & \text{sinon.} \end{cases}$

Pour (iv) et (vi), remarquons que l'on peut être plus explicite :

- on a $\cos\dfrac{3\theta}{2} \geqslant 0$ si et seulement si θ appartient à l'un des intervalles

$$I_k = \left[-\frac{\pi}{3} + k\,\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + k\,\frac{4\pi}{3}\right],$$

  pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

- on a $\cos\dfrac{\theta}{2} \geqslant 0$ si et seulement si θ appartient à l'un des intervalles

$$J_k = \Big[-\pi + k\,4\pi\,;\pi + k\,4\pi\Big],$$

  pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

Autocorrection G.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{(1-i)^{10}(\sqrt{3}+i)^5}{(-1-i\sqrt{3})^{10}} &= \frac{\left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^{10}\left(2e^{i\pi/6}\right)^5}{\left(2e^{i4\pi/3}\right)^{10}} \\
&= \frac{2^5 \times 2^5}{2^{10}} \exp\left(i \times \left(-\frac{10\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} - \frac{40\pi}{3}\right)\right) \\
&= \exp\left(-i15\pi\right) \\
&= \exp\left(i\pi\right) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Autocorrection H.

On a $z = 2e^{i\pi/6}$, donc un argument de z est $\dfrac{\pi}{6}$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \arg\left(z^n\right) \equiv n\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}.$$

Ainsi, on a les équivalences :

(i) $z^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n\dfrac{\pi}{6} \equiv 0 \pmod{\pi} \overset{\maltese}{\Leftrightarrow} n \equiv 0 \pmod{6}$.

(ii) $z^n \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow n\dfrac{\pi}{6} \equiv -\pi \pmod{2\pi} \overset{\maltese}{\Leftrightarrow} n \equiv -6 \pmod{12} \Leftrightarrow n \equiv 6 \pmod{12}$.

(iii) $z^n \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow n\dfrac{\pi}{6} \equiv \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \overset{\maltese}{\Leftrightarrow} n \equiv 3 \pmod{12}$.

Dans un souci de complétude, énonçons précisément le petit résultat qui nous a été utile pour les équivalences surmontées d'une croix de Malte.

Lemme. Soit $\alpha, T \in \mathbb{C}^*$ et $x, y \in \mathbb{C}$. On a alors l'équivalence

$$x \equiv y \pmod{T} \Leftrightarrow \alpha x \equiv \alpha y \pmod{\alpha T}.$$

Démonstration. Supposons $x \equiv y \pmod{T}$. On peut donc trouver un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + kT$. En multipliant cette égalité par α, on obtient $\alpha y = \alpha x + k\alpha T$, donc $\alpha x \equiv \alpha y \pmod{\alpha T}$.

La réciproque se montre exactement de la même façon (en fait, la réciproque peut se voir comme une application du sens direct aux nombres $x' = \alpha x$, $y' = \alpha y$, $T' = \alpha T$ et $\alpha' = \alpha^{-1}$).

Autocorrection I.

Si $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, on a $\forall k \in \mathbb{N}, \cos(\varphi + k\theta) = \cos\varphi$ et $\sin(\varphi + k\theta) = \sin\varphi$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(\varphi + k\theta) = (n+1)\cos\varphi \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(\varphi + k\theta) = (n+1)\sin\varphi.$$

Supposons maintenant $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{i(\varphi + k\theta)} &= e^{i\varphi} \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} \\
&= e^{i\varphi} \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\
&= e^{i\varphi} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \\
&= e^{i\varphi} e^{i\frac{n}{2}\theta} \frac{2i\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{2i\sin\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} e^{i\left(\varphi + \frac{n}{2}\theta\right)}
\end{aligned}$$

Donc, en prenant les parties réelle et imaginaire, il vient

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(\varphi + k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\cos\left(\varphi + \frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(\varphi + k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\sin\left(\varphi + \frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Autocorrection J.

(i) $\dfrac{1}{4}\cos(3x) + \dfrac{3}{4}\cos(x)$;

(ii) $-\dfrac{1}{4}\sin(3x) + \dfrac{3}{4}\sin(x)$;

(iii) $\dfrac{1}{8}\cos(4x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{3}{8}$;

(iv) $\dfrac{1}{8}\cos(4x) - \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{3}{8}$;

(v) $\dfrac{1}{16}\cos(5x) + \dfrac{5}{16}\cos(3x) + \dfrac{5}{8}\cos x$;

(vi) $\dfrac{1}{16}\sin(5x) - \dfrac{5}{16}\sin(3x) + \dfrac{5}{8}\sin x$;

(vii) $\dfrac{1}{4}\sin(3x) + \dfrac{1}{4}\sin x$;

(viii) $-\dfrac{1}{16}\sin(5x) + \dfrac{1}{16}\sin(3x) + \dfrac{1}{8}\sin x$;

(ix) $-\dfrac{\sin(6x)}{32} + \dfrac{3}{32}\sin(2x)$;

(x) $-\dfrac{1}{64}\cos(7x) + \dfrac{5}{64}\cos(5x) - \dfrac{9}{64}\cos(3x) + \dfrac{5}{64}\cos x$;

(xi) $-\dfrac{\cos(7x)}{4} + \dfrac{\cos(3x)}{2} - \dfrac{\cos x}{4}$;

(xii) $\dfrac{1}{8}\sin(6x) + \dfrac{3}{8}\sin(4x) + \dfrac{3}{8}\sin 2x$.

Autocorrection K.

(i) $\cos^3 x - 3\cos x\,\sin^2 x$;

(ii) $3\cos^2 x\,\sin x - \sin^3 x$;

(iii) $\cos^4(x) - 6\cos^2(x)\,\sin^2(x) + \sin^4(x)$;

(iv) $4\cos^3(x)\,\sin x - 4\cos x\,\sin^3(x)$;

(v) $\cos^5(x) - 10\cos^3(x)\,\sin^2(x) + 5\cos x\,\sin^4 x$;

(vi) $5\cos^4 x\,\sin x - 10\cos^2 x\,\sin^3 x + \sin^5 x$.

Autocorrection L.

(i) On a $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$, donc les solutions de $z^n = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ forment l'ensemble

$$\left\{2^{-1/16}e^{i\frac{5\pi}{96}}\omega \,\middle|\, \omega \in \mathbb{U}_8\right\}.$$

(ii) Les solutions de $z^n = i$ forment l'ensemble

$$\left\{e^{i\frac{\pi}{2n}}\omega \,\middle|\, \omega \in \mathbb{U}_n\right\}.$$

(iii) $-7+24i$ n'ayant pas de forme exponentielle simple, on va en trouver une racine quatrième en en extrayant une racine carrée, puis en prenant une racine carrée de cette racine carrée. Après calcul, on trouve

- que les racines carrées de $-7+24i$ sont $\pm(3+4i)$;
- que les racines carrées de (par exemple) $3+4i$ sont $\pm(2+i)$;

donc les solutions de $z^4 = -7+24i$ forment l'ensemble

$$\{(2+i)\omega \mid \omega \in \mathbb{U}_4\} = \left\{2+i, 2i-1, -2-i, 1-2i\right\}.$$

(iv) Une résolution standard montre que les solutions de l'équation $Z^2 - 3Z + 2 = 0$ sont 1 et 2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a donc la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned} z^8 - 3z^4 + 2 &\Leftrightarrow z^4 = 1 \text{ ou } z^4 = 2 \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_4 \text{ ou } z \in \left\{\sqrt[4]{2}\omega \,\middle|\, \omega \in \mathbb{U}_4\right\}. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est

$$\mathbb{U}_4 \cup \left\{\sqrt[4]{2}\omega \,\middle|\, \omega \in \mathbb{U}_4\right\} = \left\{1, i, -1, -i, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}i, -\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}i\right\}.$$