# Nombres complexes

## Généralités

**Autocorrection A.**

Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique, et calculer son module.

(i) $\dfrac{1}{i}$ ; (iv) $\dfrac{(2+3i)^2}{4-2i}$ ; (vii) $\dfrac{2+5i}{1-i}+\dfrac{2-5i}{1+i}$ ;

(ii) $\dfrac{1+i}{1-i}$ ; (v) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$ ; (viii) $\dfrac{2}{1-i\sqrt{3}}$ ;

(iii) $\dfrac{1+2i}{1-3i}$ ; (vi) $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2$ ; (ix) $\dfrac{(5-i)^6}{(3+2i)^5}$.

**Autocorrection B.**

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

(i) $3z-(3-i)\overline{z}=1-2i$ ; (ii) $2z+6\overline{z}=3+2i$ ; (iii) $(3+4i)z-5\overline{z}=2i$.

**Exercice 1.**

En fonction de $n \in \mathbb{N}$, combien valent :

- $i^n$ ;
- $1+i+i^2+\cdots+i^n$ ;
- $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdots i^n$.

**Exercice 2.**

Trouver tous les nombres complexes $z$ tels que $(z-2)(\overline{z}+i) \in \mathbb{R}$.

**Exercice 3.**

L'assertion $\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2 : \forall z \in \mathbb{C}, \overline{z}=az+b$ est-elle vraie ou fausse ?

**Exercice 4.**

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha$ pour que l'on ait l'équivalence

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x+\alpha y = 0 \Leftrightarrow x=y=0.$$

**Exercice 5.**

On note $\mathcal{S}=\left\{n^2+m^2 \,\middle|\, (n,m) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

1. Exhiber un entier naturel n'appartenant pas à $\mathcal{S}$.
2. En utilisant la formule $\forall z,z' \in \mathbb{C}, |zz'|^2 = |z|^2\ |z'|^2$, montrer que $\mathcal{S}$ est stable par produit, c'est-à-dire que $\forall p,q \in \mathcal{S}, pq \in \mathcal{S}$.
3. On pose $\mathcal{S}'=\left\{n^2+m^2+o^2 \,\middle|\, (n,m,o) \in \mathbb{Z}^3\right\}$. Montrer que $15 \notin \mathcal{S}'$ et en déduire que $\mathcal{S}'$ n'est pas stable par produit.

**Exercice 6.**

En utilisant $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, montrer que $\left\{a^2 - ab + b^2 \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ est stable par produit.

## Équations du second degré

**Autocorrection C.**

Déterminer les racines carrées des nombres suivants.

(i) $i$ ; (ii) $3 - 4i$ ; (iii) $8 - 6i$ ; (iv) $24 - 10i$ ; (v) $1 + 2i$.

**Autocorrection D.**

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes ($m \in \mathbb{R}^*$ est un paramètre).

(i) $z^2 + z + 1 = 0$ ;

(ii) $z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$ ;

(iii) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ ;

(iv) $4z^2 - 16z + 11 - 12i = 0$ ;

(v) $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$ ;

(vi) $mz^4 + (m - i)z^2 - i = 0$.

**Autocorrection E.**

Trouver les couples $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ satisfaisant les systèmes d'équations suivants.

(i) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2, \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} x + y = 3i \\ xy = -1 - 3i, \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x + y = 3 + 4i \\ xy = 5 + 15i, \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 2. \end{cases}$

**Exercice 7.**

Déterminer les $m \in \mathbb{R}$ tels que l'équation

$$z^3 + (3 + i)z^2 - 3z - (m + i) = 0 \qquad (E_m)$$

ait au moins une solution réelle.

### Relations coefficients-racines (pour les polynômes du second degré)

**Exercice 8.**

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Trouver $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $z^2 + pz + q = 0$.

**Exercice 9$^+$.**

Soit $p$ et $q$ deux nombres complexes, avec $q \neq 0$. On suppose que les deux racines de $X^2 - pX + q^2$ ont le même module.

Exprimer le quotient $\frac{p^2}{q^2}$ en fonction des deux racines, et en déduire que $\frac{p}{q} \in \mathbb{R}$.

# Exponentielle complexe

**Autocorrection F.**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

(i) $2-2i$ ;

(ii) $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ ;

(iii) $1+j$ ;

(iv) $e^{i\theta}+e^{2i\theta}$ ;

(v) $e^{e^{i\theta}}$ ;

(vi) $1+\cos\theta+i\sin\theta$.

**Autocorrection G.**

Calculer $\dfrac{(1-i)^{10}(\sqrt{3}+i)^5}{(-1-i\sqrt{3})^{10}}$.

**Autocorrection H.**

Soit $z=\sqrt{3}+i$. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $z^n$ soit dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}_-$, resp. $i\mathbb{R}_+$.)

**Exercice 10.**

Calculer les expressions suivantes (on pourra présenter les résultats sous forme exponentielle).

(i) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{666}$ ;

(ii) $(1+i)^{18}$ ;

(iii) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ ;

(iv) $\dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^3}+\dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$ ;

(v) $(1+j)^n$ (pour $n \in \mathbb{N}$) ;

(vi) $(1+i\sqrt{3})^n+(1-i\sqrt{3})^n$.

**Exercice 11.**

Montrer

$$(2+i\sqrt{5})^7+(2-i\sqrt{5})^7 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n+\left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^n \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 12.**

Soit $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ et $z_1=e^{i\theta_1}$, $z_2=e^{i\theta_2}$.

Calculer $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$, après avoir déterminé à quelle condition ce quotient avait un sens.

**Exercice 13.**

1. Montrer que si $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, alors $i\dfrac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}$.
2. Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $z=\dfrac{1+ia}{1-ia}$.

**Exercice 14$^+$.**

Montrer l'égalité $\left\{z \in \mathbb{C}^* \,\middle|\, z+\dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*$.

# Calculs de sommes

**Exercice 15.**

Soit $n > 1$ un entier. Évaluer sans calcul $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(2\pi\frac{k}{n}\right)$.

**Exercice 16.**

Soit $n \geqslant 1$ et $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{2^k} \neq 0$.

**Autocorrection I.**

Soit $\varphi, \theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(\varphi + k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(\varphi + k\theta)$.

**Exercice 17.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta)$.

**Exercice 18.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos k\theta$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin k\theta$.

**Exercice 19.**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)x)$.
2. En déduire $\cos^2 \dfrac{\pi}{14} + \cos^2 \dfrac{3\pi}{14} + \cos^2 \dfrac{5\pi}{14}$.

**Exercice 20.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{2^n x}{\pi} \notin \mathbb{Z}$. Montrer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin(2^k x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(2^n x)}{\sin(2^n x)}$.

**Exercice 21.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_0 = \sum_{p=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3p}, \qquad S_1 = \sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/3 \rfloor} \binom{n}{3p+1}, \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{p=0}^{\lfloor (n-2)/3 \rfloor} \binom{n}{3p+2}.$$

À l'aide des développpements de $(1+1)^n$, $(1+j)^n$ et $(1+\bar{j})^n$, déterminer $S_0$, $S_1$ et $S_2$.

**Exercice 22$^+$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer

$$\sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1}.$$

# (In)égalités sur les modules

**Exercice 23.**

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer que $\left|\dfrac{1-z^n}{1-z}\right| \leqslant \dfrac{1-|z|^n}{1-|z|}$.

**Exercice 24.**

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que $|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|$ et préciser les cas d'égalité.

**Exercice 25.**

Montrer que pour tous $a, b, c \in \mathbb{C}$, on a $|1+a| + |a+b| + |b+c| + |c| \geqslant 1$.

**Exercice 26.**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer $\dfrac{|\text{Ré}\, z| + |\text{Im}\, z|}{\sqrt{2}} \leqslant |z| \leqslant |\text{Ré}\, z| + |\text{Im}\, z|$.

**Exercice 27.**

Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, |e^z| \leqslant e^{|z|}$ et déterminer les cas d'égalité.

**Exercice 28.**

Soit $a$ et $b$ deux nombres complexes de module $\leqslant 1$. Montrer que $|a+b| \leqslant \sqrt{2}$ ou $|a-b| \leqslant \sqrt{2}$.

**Exercice 29.**

Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer que $|1+z| \geqslant 1$ ou $|1+z^2| \geqslant 1$.

**Exercice 30$^+$.**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z^2 - 1| \leqslant 8 \Rightarrow |z-2| \leqslant 5$.

**Exercice 31.**

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. Montrer que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0 \Rightarrow e^{i2x} + e^{i2y} + e^{i2z} = 0$.

**Exercice 32.**

Soit $a, b, c \in \mathbb{U}$. Montrer que $|a+b+c| = |ab+bc+ca|$.

**Exercice 33.**

Soit $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a|, |b| < 1$. Montrer que $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1$.

**Exercice 34$^+$.**

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On a $|a+b|^2 \leqslant \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right)$.

**Exercice 35$^{++}$.**

Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|z^n - 1| \geqslant \sqrt{3}$.

**Exercice 36$^{+++}$.**

Soit $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

1. Montrer qu'il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k\right| \leqslant \sqrt{2} \max\left(|z_1|, \dots, |z_n|\right)$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k\right| \geqslant \dfrac{2}{\pi}\left(|z_1| + \dots + |z_n|\right)$.

# Géométrie plane

**Exercice 37 (Identité du parallélogramme).**

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$ et en donner une interprétation géométrique.

**Exercice 38.**

1. Écrire sous forme complexe :
   - la rotation de centre $2-i$ et de rapport $\frac{\pi}{4}$ ;
   - l'homothétie de centre $3+2i$ et de rapport $-2$ ;
   - la composée $r \circ s$, où $r$ est la rotation de centre $1$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $s$ la symétrie centrale de centre $i+3$. Déterminer plus directement cette transformation.
2. Déterminer les type et éléments caractéristiques (centre, angle, rapport, etc.) des transformations suivantes :
   - $z \mapsto e^{i\frac{\pi}{3}} z + 1$ ;
   - $z \mapsto z + 4 - 2i$ ;
   - $z \mapsto 3z + i$.

**Exercice 39.**

Déterminer les ensembles suivants.

(i) $\{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = |z|\}$ ;

(ii) $\{z \in \mathbb{C} \mid |1+z| \leqslant 1 \text{ et } |1-z| \leqslant 1\}$ ;

(iii) $\left\{z \in \mathbb{C}^* \,\middle|\, \text{les vecteurs d'affixe } z \text{ et } \frac{1}{z} \text{ soient orthogonaux}\right\}$ ;

(iv) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \text{ est le centre du cercle circonscrit du triangle de sommets } 1, z \text{ et } z+i\}$.

**Exercice 40.**

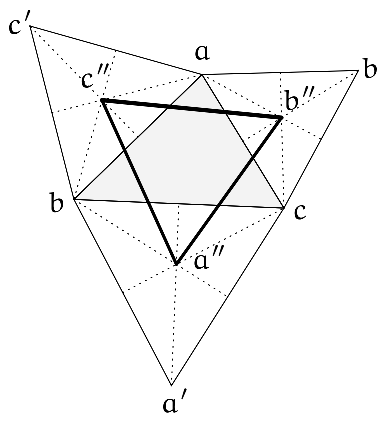
Montrer que quatre complexes distincts de $\mathbb{Z}[j] = \{a + bj \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ne peuvent pas former un carré.

**Exercice 41.**

Déterminer les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $z$ et ses trois racines cubiques forment un parallélogramme.

**Exercice 42$^+$ (Théorème « de Napoléon »).**

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$.
   (a) Montrer que le triangle $(a, b, c)$ est équilatéral direct si et seulement s'il est image de $(1, j, j^2)$ par une similitude directe.
   (b) En déduire que $(a, b, c)$ est équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.
2. Dans la figure ci-contre, les trois petits triangles extérieurs sont équilatéraux. Montrer que $(a'', b'', c'')$ est équilatéral.




**Exercice 43$^+$.**

Soit $a, b, c \in \mathbb{U}$ tels que $a + b + c = 0$. Montrer que le triangle de sommets $a$, $b$ et $c$ est équilatéral.

# Trigonométrie

**Autocorrection J.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser (c'est-à-dire exprimer comme des sommes de $\cos(px)$ et $\sin(qx)$, avec $p$ et $q$ des entiers) les expressions suivantes.

(i) $\cos^3(x)$ ;
(ii) $\sin^3(x)$ ;
(iii) $\cos^4(x)$ ;
(iv) $\sin^4(x)$ ;
(v) $\cos^5(x)$ ;
(vi) $\sin^5(x)$ ;
(vii) $\sin(x)\,\cos^2(x)$ ;
(viii) $\sin^3(x)\,\cos^2(x)$ ;
(ix) $\sin^3(x)\cos^3(x)$ ;
(x) $\sin^6(x)\,\cos(x)$ ;
(xi) $\sin^2(2x)\,\cos(3x)$ ;
(xii) $\cos^3(x)\sin(3x)$.

**Autocorrection K.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire les expressions suivantes comme des sommes de $\cos^p(x)\,\sin^q(x)$, pour des entiers $p$ et $q$.

(i) $\cos(3x)$ ;
(ii) $\sin(3x)$ ;
(iii) $\cos(4x)$ ;
(iv) $\sin(4x)$ ;
(v) $\cos(5x)$ ;
(vi) $\sin(5x)$.

**Exercice 44.**

Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$ de deux manières :

- en calculant les racines carrées de $e^{i\pi/4}$ sous forme algébrique ;
- en utilisant la formule donnant $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.

**Exercice 45.**

Calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$, de deux manières :

- à l'aide de la relation $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi}{6}$ ;
- à l'aide de la relation $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.

**Exercice 46.**

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2\cos\dfrac{\pi}{2^n} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2}}}}$, où la formule comporte $n-1$ radicaux.

# Cyclotomie

**Exercice 47.**

Calculer les produits $(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$ et $(a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$, pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

**Exercice 48.**

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Déterminer le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$.

**Exercice 49$^+$.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $Q = \left\{ \omega^2 \;\middle|\; \omega \in \mathbb{U}_n \right\}$.

1. Montrer que $Q \subseteq \mathbb{U}_n$.
2. Montrer que $Q = \mathbb{U}_n$ si et seulement si $n$ est impair.

**Exercice 50.**

1. Démontrer que $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$.
2. En déduire une équation du second degré vérifiée par $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, puis une formule pour $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
3. Déterminer $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, puis les valeurs de cos et sin en $\frac{\pi}{10}$ et $\frac{\pi}{5}$.

**Exercice 51.**

En utilisant les éléments de $\mathbb{U}_7$, exhiber une équation de degré 3 dont $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ soit solution.

**Exercice 52.**

Soit $\zeta_7 = \exp\left(i\frac{2\pi}{7}\right)$, $A = \zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^4$ et $B = \zeta_7^3 + \zeta_7^5 + \zeta_7^6$.

Calculer $A + B$ et $AB$, puis en déduire $A$ et $B$.

**Exercice 53.**

Soit $\omega \in \mathbb{U}_7 \setminus \{1\}$.

1. Montrer que $\dfrac{\omega}{1+\omega^2} + \dfrac{\omega^2}{1+\omega^4} + \dfrac{\omega^3}{1+\omega^6} = -2$.
2. En déduire la valeur de $\dfrac{1}{\cos\frac{2\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{6\pi}{7}}$.

## Équations diverses

**Autocorrection L.**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes ($n > 1$ est un entier).

(i) $z^8 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ ;

(ii) $z^n = i$ ;

(iii) $z^4 = -7 + 24i$ ;

(iv) $z^8 - 3z^4 + 2 = 0$.

**Exercice 54.**

Résoudre l'équation $1 + \bar{z} = |z|$.

**Exercice 55.**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

(i) $e^z = 0$ ;

(ii) $e^z = i$ ;

(iii) $e^z = 1 + i$ ;

(iv) $e^z + e^{-z} = 1$ ;

(v) $e^z + 2e^{-z} = i$.

**Exercice 56.**

Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 1.$$

(On commencera par déterminer pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ l'expression a un sens).

**Exercice 57.**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\text{Ré}(z^3) = \text{Im}(z^3)$.

**Exercice 58.**

Trouver tous les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $z$, $\frac{1}{z}$ et $1 - z$ aient même module.

**Exercice 59.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre $z^n = \overline{z}$.

**Exercice 60.**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes ($\theta \in \mathbb{R}$ est un paramètre, $n > 1$ un entier).

(i) $\overline{z}^7 = \dfrac{1}{z^2}$ ;

(ii) $z^2 - 2e^{i\theta}z + 2i\sin(\theta)e^{i\theta} = 0$ ;

(iii) $z^{2n} - 2\cos(n\theta)\, z^n + 1 = 0$ ;

(iv) $z^5 = 16\sqrt{2} + 16i\sqrt{2}$ ;

(v) $z^7 - 4z^5 - z^2 + 4 = 0$ ;

(vi) $z^8 + 2z^7 - 2z - 4 = 0$.

**Exercice 61.**

Résoudre l'équation $z^3 = 2 + 11i$, en sachant qu'elle possède une solution dans $\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

**Exercice 62.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^n - (z-i)^n = 0$.

**Exercice 63$^+$.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{C}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $n$ et $A$ pour que les solutions de $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = A$ soient réelles.