Matrices

Exercice 3.
Penser aux matrices élémentaires...

Exercice 7.
On pourra raisonner par analyse et synthèse, voire aller relire la preuve du fait que toute fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 8.
Difficile de donner une indication sans *spoiler*. Disons que cet exercice est difficile, jusqu'à ce qu'on tombe sur l'outil du cours qui le trivialise...

Exercice 12.
On pourra penser à appliquer la $\forall$-assertion aux matrices élémentaires.

Exercice 23.
Commencer à étudier les cas $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 27.
On pourra commencer par le cas $n = 3$ pour voir ce qu'il se passe.

Exercice 29.

2. On pourra calculer le carré de la matrice et chercher à appliquer la question précédente.
   Pour élever la matrice au carré, une possibilité est de l'écrire sous la forme $J_n - I_n$, où J_n est la *all-ones matrix* bien connue.

Exercice 30.
Pour la première question, on pourra considérer $\sum_{k=0}^{p-1} M^k$, et penser à la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique.

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) On trouve $40\, I_2$.

(ii) On trouve $\operatorname{diag}(2, 4, -2)$.

Autocorrection B.
On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} -\cos^2 x & -\cos x \sin x & \cos x \\ -\cos x \sin x & -\sin^2 x & \sin x \\ -\cos x & -\sin x & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$.

Un point important est que I_3 et A commutent, donc on peut utiliser la formule du binôme de Newton.

- $(I_3 + A)^0 = I_3$;
- $(I_3 + A)^1 = I_3 + A$;
- $(I_3 + A)^2 = I_3 + 2A + A^2$;
- $(I_3 + A)^3 = I_3 + 3A + 3A^2 + A^3 = I_3 + 3A + 3A^2$.

Et ainsi de suite : comme $A^3 = 0$, on montre facilement (par exemple par récurrence) que l'on ait $\forall k \geqslant 3, A^k = 0$.

Continuons le calcul : si $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
(I_3 + A)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k I_3^{n-k} && \text{(binôme de Newton)} \\
&= \binom{n}{0} A^0 + \binom{n}{1} A^1 + \binom{n}{2} A^2 && \text{(car } \forall k \geqslant 3, A^k = 0\text{)} \\
&= I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2.
\end{aligned}$$