# Systèmes linéaires et réduction rudimentaire

## Calcul pratique

**Autocorrection A.** ☑

Résoudre les systèmes linéaires suivants.

(i) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ x-y+2z=-1 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} 2x+3y-z=-1 \\ x+2y+3z=2 \\ 3x+4y-5z=-4 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x+2y-z+3t=2 \\ -2x-4y+2z+t=3 \\ 3x+6y-3z+2t=1 \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} 4x+3y=2 \\ 2x+y=5 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} x+2y+z+4t=2 \\ y+t=0 \\ 3x+2y+z=3 \\ 4x+4y+6z=6 \end{cases}$

(vi) $\begin{cases} 2x-2y+z+t=-1 \\ \dfrac{3}{2}x+y-3z+\dfrac{t}{2}=2 \\ y+3z=2 \end{cases}$

(vii) $\begin{cases} x+3y+z+3t+4u=2 \\ -x+y-u=5 \\ 3x+2y+t+4u=2 \end{cases}$

(viii) $\begin{cases} u+w=1 \\ v+w=0 \\ u+v=1 \\ 2u+3v=0 \end{cases}$

(ix) $\begin{cases} 2y-z=1 \\ 2x-4y+3z=-1 \\ x+y-3z=-6 \end{cases}$

(x) $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-3y+3z=-2 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$

(xi) $\begin{cases} x+y+z+t=2 \\ 2x+y+z+t=1 \\ x+2y+2z=2 \end{cases}$

(xii) $\begin{cases} 9x+15y+18z-6t+3u=3 \\ 2x+y-t+u=5 \\ 3x+5y+6z-2t+u=1 \end{cases}$

**Autocorrection B.** ☑

Soit $a, b, d, m, p, q, r, s \in \mathbb{R}$ des paramètres. Résoudre les systèmes suivants, en discutant selon les valeurs des paramètres.

(i) $\begin{cases} x+y=s \\ x-y=d \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} 3x+y-z=-1 \\ 5x+2y-2z=a \\ 4x+y-z=b \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x+y=1 \\ ax+by=0 \\ a^2x+b^2y=1 \\ a^3x+b^3y=0 \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=1 \\ x+y+z=m \end{cases}$

(v) $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ (2a+1)x+3y+(a+2)z=3 \end{cases}$

(vi) $\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+2z=a \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

(vii) $\begin{cases} x+y+4z+4t=a \\ 3x+y-4z+6t=0 \\ x-4z+t=b \end{cases}$

(viii) $\begin{cases} 2y+2z=p \\ -2x+z=q \\ -2x-y=r \\ x-2y+2z=s \end{cases}$

**Exercice 1.**

1. L'un des deux systèmes suivants n'a pas de solution. De tête, déterminer lequel.

$$\begin{cases} 2x+3y-\ z\ +t=2\\ 2x+3y+\ z \qquad =4\\ 2x+3y+2z \qquad =3\\ 2x+3y \qquad\qquad =5 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 2x+3y-\ z\ +t=2\\ 2x+3y+\ z \qquad =4\\ 2x+3y+2z \qquad =3\\ 2x+3y \qquad\qquad =4 \end{cases}$$

   Résoudre l'autre, de tête aussi...

2. Résoudre de tête : $\begin{cases} x+y+z=-1\\ x+y-z=\ 2\\ x-y-z=\ 3 \end{cases}$

**Exercice 2.**

Pour quelles valeurs de $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ le système

$$\begin{cases} ax+by=1\\ bx+ay=1 \end{cases}$$

a-t-il aucune solution ? une infinité de solutions ? une unique solution ?

**Exercice 3.**

Pour quelles valeurs de $a$ le système

$$\begin{cases} x\ +\ y\ -\ z\ =1\\ x\ +2y+az=2\\ 2x+ay+2z=3 \end{cases}$$

a-t-il aucune solution ? une infinité de solutions ? une unique solution ?

**Exercice 4$^{+}$.**

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$. Résoudre le système

$$\begin{cases} ax_1+\ x_2\ +\cdots+\ x_n\ =b_1\\ x_1\ +ax_2+\cdots+\ x_n\ =b_2\\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\ x_1\ +\ x_2\ +\cdots+ax_n=b_n. \end{cases}$$

## Problèmes se ramenant à des systèmes linéaires

**Exercice 5.**

La tablette VAT 8389, conservée au *Vorderasiatisches Museum* de Berlin, date de la période paléo-babylonienne (première moitié du deuxième millénaire avant notre ère). Elle comporte deux des plus anciens exemples conservés de problèmes se ramenant à des systèmes linéaires. Voici le premier, dans la traduction de François Thureau-Dangin : résolvez-le. (Le *sar* et le *bur* sont deux unités d'aire, un *bur* valant 1800 *sar* ; le *sìla* et le *gur* sont des unités de volume, un *gur* valant 300 *sìla*).

> Par *bur*, j'ai perçu 4 *gur* de grain. Par second *bur*, j'ai perçu 3 *gur* de grain. Un grain excède l'autre de 500 [*sìla*]. J'ai additionné mes champs : 1800 [*sar*]. Que sont mes champs ?

**Exercice 6.** ☑

De quelle nature sont les deux ensembles

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + 3y + z = 1 \right\} \qquad \text{et} \qquad Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y + 2z = 3 \right\} \ ?$$

S'intersectent-ils ? Si oui, décrire leur intersection sous forme paramétrée.

**Exercice 7 (Résolution de l'équation du second degré par la résolvante de Lagrange).**

Soit S et P deux nombres complexes. Le but de cet exercice est de donner une manière alternative de résoudre l'équation $x^2 - Sx + P = 0$. On note $z_1$ et $z_2$ les deux solutions de l'équation (avec la convention usuelle $z_1 = z_2$ dans le cas où l'équation n'a qu'une solution).

1. Calculer $(z_1 - z_2)^2$ en fonction de S et P.
2. Soit $\delta$ une racine carrée de $S^2 - 4P$. Exprimer $z_1 \pm z_2$ en fonction de S et $\delta$.
3. Conclure.

**Exercice 8.**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices de $M_2(K)$ qui commutent avec A.

**Exercice 9.**

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & ae^x + bx + c. \end{cases}$ Pour quelles valeurs de $a$, $b$ et $c$ a-t-on que le graphe de $f$ contient $(0, 1)$, que sa tangente en ce point contient également $(2, 3)$ et que le graphe admette une tangente horizontale au point d'abscisse $\ln 3$ ?

**Exercice 10$^+$.**

Déterminer les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ (s'ils existent) tels que l'on ait les identités suivantes.

(i) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}_3, \dfrac{1}{x^3 - 1} = \dfrac{a}{x - 1} + \dfrac{bx + c}{x^2 + x + 1}$ ;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2, 3\}, \dfrac{1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x - 2} + \dfrac{c}{x - 3}$ ;

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}_-, \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2} = ax + b + \dfrac{c}{x - 2}$ ;

(iv) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, \dfrac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x - 1} + \dfrac{c}{(x - 1)^2}$.

**Exercice 11.**

Résoudre les systèmes suivants (on commencera par préciser dans quel ensemble on cherche les solutions, de telle sorte que toutes les expressions aient un sens).

(i) $\begin{cases} xy = 1 \\ x/y = 2 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} xyz = 1 \\ xy^2z^4 = 2 \\ xy^3z^9 = 3. \end{cases}$

# Suppléments de théorie

**Exercice 12.**

Quelles sont les formes possibles pour la matrice échelonnée réduite équivalente à une matrice M de taille $2 \times 2$ donnée ? (On pourra commencer par distinguer les cas suivant le nombre de pivots.) Dans chacun des cas, on décrira l'ensemble K des solutions du système linéaire homogène associé à M.

Même question pour une matrice M de taille $3 \times 3$.

**Exercice 13$^+$.**

Soit $A \in M_{n,p}(K)$ et $B \in K^n$. Montrer qu'exactement l'un des cas suivants advient :

(i) $\exists X \in K^p : AX = B$ ;

(ii) $\exists Y \in K^n : {}^tYA = 0$ et ${}^tYB \neq 0$.

**Exercice 14$^+$.**

Soit $1 \leqslant i, j \leqslant n$ des entiers naturels. Écrire les matrices d'échange $P_{i,j} \in GL_n(K)$ comme des produits de matrices de transvection et de dilatation, et en déduire une amélioration d'un théorème du cours.

**Exercice 15$^{++}$.**

Soit $A \in M_{n,p}(K)$. Montrer qu'il existe une **unique** matrice échelonnée réduite (par lignes) S en laquelle on puisse transformer A par une suite d'opérations élémentaires (sur les lignes).

# Inversibilité des matrices

**Autocorrection C.** ☑

Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse.

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ;
- $\begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ ;
- $\begin{pmatrix} 1 & \overline{z} & \overline{z}^2 \\ z & 1 & \overline{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix}$ ;
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ ;
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 16.** ☑

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la matrice $J_n \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

À quelle condition sur $n$ la matrice $J_n$ est-elle inversible ? On donnera (au moins) deux démonstrations.

**Exercice 17.**

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB, AC. La matrice A est-elle inversible ?
2. Déterminer les matrices $F \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$.

**Exercice 18.**

Soit $A = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$.

Calculer ${}^tAA$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible (on en donnera alors l'inverse). Que devient la condition si $A \in M_4(\mathbb{R})$ ?

**Exercice 19 (Déterminant en dimension 3).**

1. Soit $n \geqslant 1$ un entier et $M = \left(\begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{array}\right) \in M_n(K)$, avec $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ et une matrice $N \in M_{n-1}(K)$. Montrer que M est inversible si et seulement si $a_1 \neq 0$ et $N \in GL_{n-1}(K)$.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(K)$. On suppose $a \neq 0$. Montrer que
$$B \in GL_3(K) \Leftrightarrow aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \neq 0.$$

**Exercice 20$^+$ (Lemme de Hadamard sur les matrices à diagonales dominantes).**

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

## Rudiments de réduction

**Exercice 21.**

Réduire les matrices suivantes, c'est-à-dire donner des matrices simples auxquelles elles sont semblables. Quand cela est pertinent, on fera à la fois le travail en supposant que le corps de base est $\mathbb{C}$ et en supposant qu'il est $\mathbb{R}$.

- $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ;
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ;
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

**Exercice 22.**

À l'aide de la réduction, calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

**Exercice 23 (Matrices nilpotentes).**

Soit $M \in M_2(K)$ telle que $\exists n \in \mathbb{N} : M^n = 0$. Montrer que $M^2 = 0$.

**Exercice 24.**

Dans cet exercice, on dira qu'une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ possède la propriété $(\mathcal{C})$ si

$$\forall B \in M_2(\mathbb{R}), AB = BA \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{R} : B = uI_2 + vA.$$

1. Montrer que la propriété $(\mathcal{C})$ est *invariante par similitude*, c'est-à-dire que si $A$ et $A'$ sont deux matrices semblables, alors $A$ possède la propriété $(\mathcal{C})$ si et seulement si $A'$ la possède.
2. En déduire que toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ non scalaire possède la propriété $(\mathcal{C})$.

**Exercice 25.**

Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_2$. Montrer que $M$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le même résultat est-il vrai en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ ?

**Exercice 26$^+$.**

On note $\mathcal{P} = \left\{ M \in M_2(K) \,\middle|\, M^2 = M \right\}$.

1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{P}$ est soit $0_2$, soit $I_2$, soit semblable à $\operatorname{diag}(-1, 1)$.
2. Montrer que toute matrice de $M_2(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de matrices de $\mathcal{P}$.

**Exercice 27.**

Montrer que toute matrice de $M_2(K)$ est semblable à sa transposée.

**Exercice 28$^+$ (Presque-diagonalisation).**

Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que

$$P^{-1}AP \in T_2^+(\mathbb{C}) \qquad \text{et} \qquad \left|[P^{-1}AP]_{1,2}\right| \leqslant \varepsilon.$$

**Exercice 29$^+$.**

1. Quelles sont les matrices de $M_2(\mathbb{C})$ semblables à leur carré ?
2. Quelles sont les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ semblables à leur carré ?

## Suites récurrentes

**Autocorrection D.**

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression générale de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses premiers termes et une relation de récurrence.

(i) $u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n.$

(ii) $u_0 = 1, \quad u_1 = 6, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$

(iii) $u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{2}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n.$

(iv) $u_0 = 2, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0.$

**Exercice 30.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 2u_n + n$.

1. Montrer qu'il existe une suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En étudiant la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 31.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 5^n$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n/5^n$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique ; en déduire l'expression de son terme général.
2. En déduire l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 32.**

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites réelles définies par

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n. \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = 2a_n - b_n$. Calculer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire l'expression de $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 33.**

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique ; en déduire l'expression de son terme général.
2. En déduire une relation de récurrence satisfaite par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer l'expression du terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 34.**

1. Déterminer toutes les suites réelles bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0.$$
2. Déterminer toutes les suites réelles bornées $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n = 12\,(-1)^n.$$

**Exercice 35$^+$.**

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(f(x)) = 6x - f(x)$ et $\forall x > 0, f(x) > 0$.