Fonctions réelles

Propriétés générales des fonctions réelles

Autocorrection A.

Peut-on déterminer, en général, la parité de

(i) la somme de deux fonctions, si on connaît leur parité ?

(ii) le produit de deux fonctions, si on connaît leur parité ?

(iii) la composée de deux fonctions, si on connaît leur parité ?

(iv) la composée $h \circ f$, si f est paire (resp. impaire) et h est quelconque ?

(v) la composée $f \circ h$, dans les mêmes conditions ?

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ soit croissante et $f \circ f \circ f$ strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 2.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Montrer que $\cos^{-1}[A]$ est un domaine 2π-périodique.

Exercice 3$^+$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $x \mapsto \cos(x) + \cos(\alpha x)$ est périodique si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$.
2. Même question pour la fonction $x \mapsto \sin(x) + \sin(\alpha x)$.

Exercice 4.

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que D est un domaine T-périodique si et seulement si $\mathbb{1}_D$ est une fonction T-périodique.
2. À quelle condition portant sur D la fonction $\mathbb{1}_D$ est-elle paire ?
3. À quelle condition portant sur D la fonction $\mathbb{1}_D$ est-elle impaire ?
4. À quelle condition portant sur D la fonction $\mathbb{1}_D$ est-elle croissante ?

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que le graphe de f admette deux centres de symétrie.

Montrer que f est la somme d'une fonction affine et d'une fonction périodique.

Fonctions usuelles

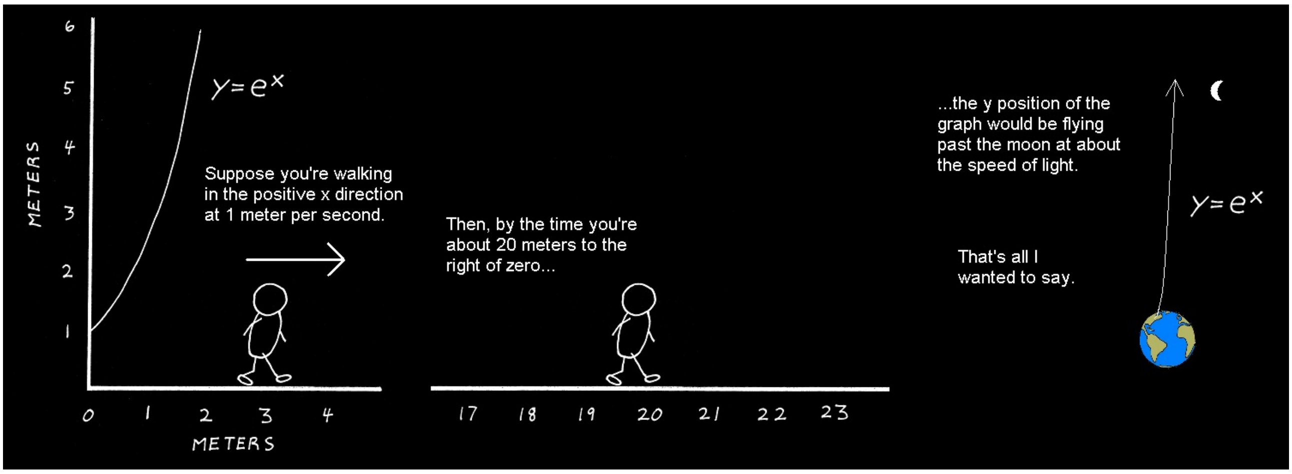
Exponentielle et logarithme

Autocorrection B.

Déterminer pour quels valeurs de x l'expression $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$ a un sens, et simplifier l'expression.

Exercice 6.

Justifier ce strip du webcomic *Abstruse Goose* (`http://abstrusegoose.com/218`).



Exercice 7.

Trouver tous les $a \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, a^x \geqslant x+1$.

Exercice 8.

Le plus grand nombre premier connu à ce jour est $2^{82\,589\,933}-1$ (il a été découvert le 7 décembre 2018 par le projet *Great Internet Mersenne Prime Search*). Combien y a-t-il de chiffres dans son écriture décimale ?

Exercice 9.

Existe-t-il un entier n tel que $30^{4^{1777}}$ et 2^n aient le même nombre de chiffres ?

Exercice 10$^+$.

Montrer que l'exponentielle n'est pas la somme d'un nombre fini de fonctions périodiques.

(Notons que l'on ne met aucune hypothèse de régularité sur ces fonctions périodiques).

Exercice 11.

Résoudre l'équation $2^{x+4}+3^x = 2^{x+2}+3^{x+2}$.

Exercice 12$^+$.

Résoudre les deux systèmes suivants (a désigne un paramètre réel).

(i) $\begin{cases} 8^x &= 10y \\ 2^x &= 5y \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} e^x e^{2y} &= a \\ 2xy &= 1 \end{cases}$

Exercice 13$^+$.

Déterminer les couples $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y &= \ln 2 \\ x-y &= 2. \end{cases}$

Exercice 14.

Déterminer les $x \in]1,+\infty[$ tels que $\ln(x-1)+\ln(x+1) < 2\ln x - 1$.

Fonctions hyperboliques

Exercice 15.

1. Soit x et $y \in \mathbb{R}$. Montrer
$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y.$$
2. (a) Donner une formule pour $\operatorname{th}(x+y)$.
   (b) Montrer $\forall a, b \in]-1,1[\,,\ \dfrac{a+b}{1+ab} \in]-1,1[$.

Exercice 16.
Montrer $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^p = \operatorname{ch}(px) + \operatorname{sh}(px)$.

Exercice 17.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch} \frac{x}{2^k}$.

Exercice 18.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = 0$.

Exercice 19.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(x+ky)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(x+ky)$.

Fonctions trigonométriques

Exercice 20.
Soit p et q deux réels.

1. À quelle condition a-t-on $\sin p + \sin q \neq 0$?
2. Si la condition de la question précédente est remplie, simplifier $\dfrac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$.
3. En déduire $\tan \dfrac{\pi}{24}$.

Exercice 21.
Montrer que le graphe de arccos possède un centre de symétrie.

Exercice 22.

1. Montrer que $\arctan(2\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2}) = \pi$.
2. En déduire la valeur de $\arctan\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) + 2\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Études de fonctions

Autocorrection C. ☑

Pour chacune des expressions suivantes, dire pour quelles valeurs de x elle a un sens. On obtient ainsi une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, pour une certaine partie $D \subseteq \mathbb{R}$. Préciser un ensemble D' de points où f est dérivable, et la dériver. (On désigne par a, b, des nombres réels > 0 fixés une fois pour toutes).

(a) $\exp(-a/x^2)$;

(b) $\dfrac{\cos(ax^2+bx+1)}{\sin x}$;

(c) $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$;

(d) $\sqrt{1+\cos^2 x}$;

(e) $(ax+b)^x$;

(f) $x - a\sqrt{x}$;

(g) $\arctan(e^x)$;

(h) $\arcsin(x^2-1)$;

(i) $\arccos\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$;

(j) $\arctan\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

(k) $\dfrac{\cos^3 x}{(1-\cos x)^2}$;

(l) $\sin\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$;

(m) $\dfrac{x+1}{\sin(2x)}$;

(n) $\sin\left((2x+5)^2\right)$;

(o) $\arccos\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$;

(p) $\sqrt{\arcsin x - \dfrac{\pi}{6}}$;

(q) $\arcsin(\tan x)$;

(r) $\operatorname{sh} x \sin x$;

(s) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

(t) $\ln(1+\operatorname{ch} x)$;

(u) x^x ;

(v) $\cos(x)\ \ln(1+x)$;

(w) $\ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$;

(x) $\arctan(\operatorname{ch}(x))$;

(y) $\dfrac{1}{\operatorname{sh}(\arcsin(x))}$;

(z) $\dfrac{\sin x}{(\cos x+2)^4}$.

(α) $\ln(\arctan x)$;

(β) $(\operatorname{ch} x)^x$;

(γ) $x^3\cos(5x+1)$;

(δ) $\dfrac{1}{\sin(x^2)}$;

(ε) $\ln(e^x+1)$;

(ζ) $e^{x^3+2x^2+3x+4}$;

(η) $\exp\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)$;

(θ) $\dfrac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1}$;

(ι) $\dfrac{\cos(2x)}{x^2-2}$;

(κ) $\ln(\cos(2x))$;

(λ) $\dfrac{|x|\ \sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$;

(μ) $\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$;

(ν) $\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$;

(ξ) $\ln(\ln x)$;

(o) $\ln(\ln(\ln x))$;

(π) $\sin x \sin\dfrac{1}{x}$;

(ρ) $\sqrt{1+x^2\sin^2 x}$;

(σ) $\ln\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$;

(τ) $e^{\cos x}$;

(υ) $\dfrac{x}{x^2+1}$;

(φ) $\arcsin\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$;

(χ) $\dfrac{x}{\sin x}$;

(ψ) $\ln(\arcsin(x^2))$;

(ω) $\ln(e^x+\sin x)$.

Exercice 23. ☑

Décrire pour quels $x \in \mathbb{R}$ les expressions suivantes ont un sens, puis tracer rapidement le graphe des fonctions qu'elles définissent.

(i) $2\ln\dfrac{1}{2-x}$;

(ii) $\sqrt{3x-2}-1$;

(iii) $\dfrac{4}{2x+1}+3$.

Exercice 24. ☑

Étudier, selon le plan vu en cours, les fonctions définies par les expressions suivantes.

(i) $\dfrac{x^3}{x^2-3}$;

(ii) $\ln(x^2-1)$;

(iii) $\sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$;

(iv) $\dfrac{\tan 2x}{\tan x}$;

(v) $x\ \arctan\dfrac{1}{x}$;

(vi) $\sin(3x)+3\sin x$.

Exercice 25$^+$.

Soit $W : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction, que l'on ne suppose pas dérivable *a priori*. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, W(x)\, e^{W(x)} = x.$$

Déterminer les variations de W.

Identités

Exercice 26$^+$.

1. Trouver tous les triplets de réels (a, b, c) tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $a\, e^{2x} + b\, e^x + c = e^{2x} + 2e^x - 1$.
2. Même question avec l'égalité $\forall x \in [-1, 1]$, $a \arccos x + b \arcsin x + c = \arccos x + 2 \arcsin x - 1$.

Exercice 27.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, simplifier $\arctan(\operatorname{sh} x) + \arccos(\operatorname{th} x)$.
2. Résoudre l'équation $\operatorname{th} x = \dfrac{5}{13}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire l'égalité $\arctan \dfrac{5}{12} + \arccos \dfrac{5}{13} = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 28.

1. Soit a et b deux réels tels que $ab \neq 1$. Simplifier $\arctan a + \arctan b - \arctan \dfrac{a+b}{1-ab}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $\arctan \dfrac{1+x}{1-x}$.

Exercice 29.

1. Montrer, à l'aide d'une étude de fonctions, que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \arctan \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.
2. Démontrer le même résultat à l'aide de trigonométrie élémentaire.

Exercice 30.

Dire pour quels $x \in \mathbb{R}$ les expressions suivantes ont un sens, puis simplifier.

(i) $\dfrac{1+\sin x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$;

(ii) $\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$;

(iii) $\dfrac{1-2\cos x - 3\cos^2 x}{\sin^2 x} - \dfrac{1-3\cos x}{1-\cos x}$;

(iv) $\tan(\arcsin x)$;

(v) $\sin(\arccos x)$;

(vi) $\cos(\arctan x)$;

(vii) $\cos(2 \arccos x)$;

(viii) $\cos(2 \arcsin x)$;

(ix) $\sin(2 \arccos x)$;

(x) $\cos(2 \arctan x)$;

(xi) $\sin(2 \arctan x)$;

(xii) $\tan(2 \arcsin x)$.

Exercice 31.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $\arctan(x+1) - \arctan x$.
2. Soit $n \geqslant 1$. Déduire de ce qui précède une expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan \frac{1}{k^2+k+1}$.
3. Que dire de S_n quand $n \to +\infty$?

Inégalités

Exercice 32.

Montrer les inégalités suivantes.

(i) $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geqslant 2$;

(ii) $\forall x \in]0, 4[\setminus \{1\}, \left| \frac{x+2}{1-x} \right| \geqslant 2$;

(iii) $\forall x \in [0, 2], \frac{1}{3} \leqslant \frac{x+1}{x^2+3} \leqslant \frac{1}{2}$;

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{6} \leqslant \frac{x+1}{x^2+3} \leqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 33.

Montrer les inégalités suivantes.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geqslant 1 + x$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \frac{x+1}{x-1} \ln x \geqslant 2$;

(iii) $\forall x > 0, x \ln x - (x-1) \leqslant (x-1)^2$;

(iv) $\forall x \geqslant 0, (x-2)e^x + (x+2) \geqslant 0$;

(v) $\forall n \geqslant 2, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Exercice 34.

Montrer les inégalités suivantes.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leqslant |x|$;

(ii) $\forall x \in [-1, 1], |\arcsin x| \geqslant |x|$;

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant 1 - \cos x \leqslant \frac{x^2}{2}$;

(iv) $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, |\tan x| \geqslant |x|$.

Exercice 35 (Inégalité de Huygens).

Montrer $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, x \leqslant \frac{2}{3}\sin(x) + \frac{1}{3}\tan(x)$.

Exercice 36$^+$.

Montrer $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \cos(x) < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$.

Exercice 37.

Montrer

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leqslant \sum_{k=1}^{2p+1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Exercice 38⁺.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ de cardinal 13. Montrer qu'il existe $a, b \in A$ tels que

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} \leqslant 2-\sqrt{3}.$$

Équations

Exercice 39.

1. Montrer que l'équation $x \ln x = 1$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que la fonction $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} \end{cases}$ possède un unique point fixe.
3. Montrer que l'équation $e^{-x^2} = e^x - 1$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 40.

Résoudre l'équation $\cos^3 x + \sin^3 x = 1$.

Exercice 41.

Résoudre les équations suivantes.

(i) $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$;

(ii) $\cos 4x + \sin 4x = 1$;

(iii) $\sin x + \sin 3x = 0$;

(iv) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;

(v) $3\cos x - 3\sin x = 6$;

(vi) $2\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos 2x = 0$.

Exercice 42.

Résoudre l'équation $\tan x \tan 2x = 1$.

Exercice 43.

Résoudre les équations suivantes.

(i) $\arcsin 2x = \arccos x$;

(ii) $\arcsin(x+1) - \arcsin x = \dfrac{\pi}{6}$;

(iii) $\arctan x + \arctan(2x) = \dfrac{\pi}{4}$;

(iv) $\arcsin x = \arccos \dfrac{1}{3} - \arccos \dfrac{1}{4}$;

(v) $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{3}$;

(vi) $\arcsin x = \arctan 2 + \arctan 3$.

Dérivées supérieures

Autocorrection D.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la dérivée n-ième des applications suivantes.

(i) $x \mapsto \cos(3x)$;

(ii) $x \mapsto x^5 e^{3x}$;

(iii) $x \mapsto e^x \cos x$;

(iv) $x \mapsto x^\alpha$;

(v) $x \mapsto x^2 \sin x$;

(vi) $x \mapsto \cos^3 x$;

(vii) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$;

(viii) $x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x)$.

Exercice 44.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f_n : x \mapsto x^{n-1} e^{1/x}$.

Exercice 45$^+$.

On note $f = \arctan$ pour simplifier.

1. Montrer que f est lisse et que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin\left(n\left(\frac{\pi}{2} + f(x)\right)\right).$$
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des points d'annulation de $f^{(n)}$.

Exercice 46$^+$.

Montrer que la fonction tan est lisse et *absolument monotone sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, c'est-à-dire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \tan^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

Exercice 47$^+$.

1. Montrer que la fonction arcsin est trois fois dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer $f = \left(\dfrac{\arcsin''}{\arcsin'}\right)'$.

   On exprimera le résultat sous la forme d'une fonction $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x+\beta} + \dfrac{\gamma}{x+\delta}$.

On dit qu'une fonction est *absolument monotone* sur un intervalle si elle y est lisse, et que toutes ses dérivées y sont $\geqslant 0$.

2. Montrer que f est absolument monotone.
3. En déduire que arcsin est absolument monotone.

Exercice 48.

En calculant de deux façons la dérivée n-ième de $x \mapsto x^{2n}$, retrouver l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 49$^+$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons différentes la dérivée n-ième de $x \mapsto x^n \ln(x)$, montrer
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$