Relations

Exercice 5.

Pour la deuxième question, convainquez-vous d'un fait général : si un ensemble ordonné peut s'écrire comme union de k chaînes $E = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$, alors aucune antichaîne n'a strictement plus de k éléments.

Exercice 7.

Pour la dernière question, vous devriez trouver 16 ensembles ordonnés, à isomorphisme près.

Exercice 9.

Pour la première question, on pourra notamment s'inspirer de la notion de clôture réflexive et transitive présentée dans un exercice précédent.

Exercice 12.

On pourra commencer par traiter l'exercice avec l'hypothèse plus simple

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x - y| \leqslant 1 \Rightarrow x \approx y.$$

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) On a $0 \not\ll 0$, donc $\ll$ n'est pas réflexive : ce n'est pas une relation d'ordre.
(Elle est transitive et antisymétrique.)

(ii) ► $\leqq\!\!\!\ll$ est une relation d'ordre.

Réflexivité. On a bien $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \underline{\ll} x$.

Antisymétrie. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x \underline{\ll} y$ et $y \underline{\ll} x$.

Supposons par l'absurde $x \neq y$.

- Par définition de $\underline{\ll}$ et comme $x \neq y$, la relation $x \underline{\ll} y$ donne $x \leqslant y - 1$.
- Par définition de $\underline{\ll}$ et comme $x \neq y$, la relation $y \underline{\ll} x$ donne $y \leqslant x - 1$.

On en déduit $x \leqslant (x-1) - 1 = x - 2$, une contradiction.

Cela montre $x = y$.

Transitivité. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ tels que $x \underline{\ll} y$ et $y \underline{\ll} z$.

- Si $x = y$ ou $y = z$, on a clairement $x \underline{\ll} z$.
- Supposons donc que ce ne soit pas le cas. Les deux relations $x \underline{\ll} y$ et $y \underline{\ll} z$ donnent donc $x \leqslant y - 1$ et $y \leqslant z - 1$, d'où $x \leqslant z - 2 \leqslant z - 1$, ce qui montre $x \underline{\ll} z$.

► On a $0 \,\underline{\not\ll}\, 1/2$ et $1/2 \,\underline{\not\ll}\, 0$, donc l'ordre n'est pas total.

► Passons à la description des éléments remarquables de cet ensemble ordonné.

Maximum/éléments maximaux. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $x \underline{\ll} x + 1$ (et $x \neq x + 1$), ce qui montre que l'ensemble ne possède pas d'éléments maximaux, et donc pas de maximum.

Éléments minimaux. Montrons que l'ensemble des éléments minimaux est l'intervalle $[0, 1[$.

- Soit $x \in [0, 1[$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $t \lll x$.
  Si l'on avait $t \neq x$, on aurait $t \leqslant x - 1$, ce qui est impossible car $t \in \mathbb{R}_+$ et $x - 1 < 0$.
  On a donc $t = x$, ce qui montre que t est minimal.
- Réciproquement, soit $t \in \mathbb{R}_+ \setminus [0, 1[= [1, +\infty[$.
  On a alors $x - 1 \in \mathbb{R}_+$ et $x - 1 \lll x$, ce qui montre que x n'est pas minimal.

Minimum. Puisque l'ordre possède plusieurs éléments minimaux, il n'a pas de minimum.

(iii) On a $0 \lesssim 1/2$ et $1/2 \lesssim 0$, donc $\lesssim$ n'est pas antisymétrique : ce n'est pas une relation d'ordre.
(Elle n'est pas non plus transitive, mais elle est réflexive.)

(iv) ▸ Si p et q sont des nombres premiers tels que $p \mid q$, alors $p = q$.
Autrement dit, sur $\mathcal{P}$, la relation de divisibilité coïncide avec la relation d'égalité, dont on sait qu'il s'agit d'une relation d'ordre (non total).

▸ Un peu tautologiquement, tout élément de $\mathcal{P}$ est à la fois minimal et maximal, et il n'y a (donc) pas de minimum ou de maximum.

(v) ▸ Il s'agit d'une relation d'ordre : c'est simplement la relation d'ordre classique $\subseteq$ sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, restreinte aux parties finies.

▸ L'ordre n'est pas total : on a par exemple $\{0\} \nsubseteq \{1\}$ et $\{1\} \nsubseteq \{0\}$.

▸ **Minimum.** On a $\forall E \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \varnothing \subseteq E$, donc $\varnothing$ est le minimum de $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$.
À ce titre, il est son seul élément minimal.

Maximum/éléments maximaux. Pour tout $E \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, on peut trouver $E' \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ tel que $E \subsetneq E'$. En effet, soit $E \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$:

- si E est vide, $E' = \{0\}$ convient ;
- si E n'est pas vide, on sait qu'il admet un maximum, et $E' = E \cup \{1 + \max(E)\}$ convient.

Cela montre que $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ n'a pas d'élément maximal et, *a fortiori*, pas de maximum.

(vi) On a $\{0\} \preccurlyeq \{1\}$ et $\{1\} \preccurlyeq \{0\}$, alors que $\{0\} \neq \{1\}$. Cela montre que $\preccurlyeq$ n'est pas antisymétrique : ce n'est pas une relation d'ordre.
(Elle est réflexive et transitive.)

(vii) ▸ $\leqslant$ est une relation d'ordre : les trois axiomes se vérifient sans difficulté.

▸ On a $\mathbb{1}_{\{0\}} \nleqslant \mathbb{1}_{\{1\}}$ et $\mathbb{1}_{\{1\}} \nleqslant \mathbb{1}_{\{0\}}$: l'ordre n'est pas total.

▸ **Minimum.** On a $\forall f \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{R}}, 0 \leqslant f$, donc 0 est le minimum (et donc l'unique élément minimal) de $\mathbb{R}_+^{\mathbb{R}}$ pour $\leqslant$.

Maximum/éléments maximaux. On a $\forall f \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{R}}, f \leqslant f + 1$, donc il n'y a aucun élément maximal (et donc en particulier pas de maximum) dans $\mathbb{R}_+^{\mathbb{R}}$.

(viii) On a $\mathbb{1}_{\{0\}} \leqslant_* \mathbb{1}_{\{1\}}$ et $\mathbb{1}_{\{1\}} \leqslant_* \mathbb{1}_{\{0\}}$, ce qui montre que $\leqslant_*$ n'est pas antisymétrique : ce n'est pas une relation d'ordre.
(Elle n'est pas non plus transitive, mais elle est réflexive).

(ix) De même, on a $\mathbb{1}_{\{0\}} \leqslant_{\text{àpcr}} \mathbb{1}_{\{1\}}$ et $\mathbb{1}_{\{1\}} \leqslant_{\text{àpcr}} \mathbb{1}_{\{0\}}$, ce qui montre que $\leqslant_{\text{àpcr}}$ n'est pas antisymétrique : ce n'est pas une relation d'ordre.
(Elle est réflexive et transitive.)

Autocorrection B.

(i) On a $(0, 0, 0, \ldots, 0) =_* (0, 1, 1, \ldots, 1)$ et $(0, 1, 1, \ldots, 1) =_* (1, 1, 1, \ldots, 1)$, mais on a pourtant $(0, 0, 0, \ldots, 0) \neq_* (1, 1, 1, \ldots, 1)$, ce qui prouve que $=_*$ n'est pas transitive : ce n'est donc pas une relation d'équivalence.
(Elle est réflexive et symétrique).

(ii) La relation $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence.

Réflexivité. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a $x = I_n\, x$ et $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$, donc $x \leftrightarrow x$.

Symétrie. Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $x \leftrightarrow y$.
On peut donc trouver $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $y = Px$.
On a alors $x = P^{-1}y$ et $P^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$, donc $y \leftrightarrow y$.

Transitivité. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ tels que $x \leftrightarrow y$ et $y \leftrightarrow z$.
On peut donc trouver $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que $y = Px$ et $z = Qy$.
On a alors $z = QPx$ et $QP \in GL_n(\mathbb{R})$, donc $x \leftrightarrow z$.

(iii) La relation $=_{\text{àpcr}}$ est une relation d'équivalence.

Réflexivité. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On a alors $\forall n \geqslant 0, u_n = u_n$, donc $u =_{\text{àpcr}} u$.

Symétrie. Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que $u =_{\text{àpcr}} v$.
On peut donc trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, u_n = v_n$.
On en déduit que $\forall n \geqslant N, v_n = u_n$, ce qui implique $g =_{\text{àpcr}} f$.

Transitivité. Soit $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que $u =_{\text{àpcr}} v$ et $v =_{\text{àpcr}} w$.
On peut donc trouver $N, M \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geqslant N, u_n = v_n$ et $\forall n \geqslant M, v_n = w_n$.
Posons $K = \max(N, M)$. Montrons $\forall n \geqslant K, u_n = w_n$.
Soit $n \geqslant K$.

- ▸ Comme $K \geqslant N$, on a $n \geqslant N$, donc $u_n = v_n$.
- ▸ De même, comme $K \geqslant M$, on a $n \geqslant M$, donc $v_n = w_n$.

On en déduit que $u_n = w_n$.
On a donc bien $\forall n \geqslant K, u_n = w_n$, ce qui montre que $u =_{\text{àpcr}} w$.

(iv) La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Réflexivité. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$.
Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{u_n}{u_n} = 1$. *A fortiori*, $\dfrac{u_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Symétrie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ deux suites telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a donc $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
En passant à l'inverse, on a $\dfrac{v_n}{u_n} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1} = 1$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Transitivité. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ trois suites telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. En multipliant les deux suites, on a donc

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \times 1 = 1.$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(v) On a $\mathbb{R} \nparallel \mathbb{R}$, donc $\parallel$ n'est pas réflexive : ce n'est pas une relation d'équivalence.
(Elle n'est pas non plus transitive ; elle est symétrique).

(vi) On a $\varnothing \not\between \varnothing$, donc $\between$ n'est pas réflexive : ce n'est pas une relation d'équivalence.
(Elle n'est pas non plus transitive ; elle est symétrique).

(vii) On a $[0, 1] \subseteq [0, 2]$ et $[1, 2] \subseteq [0, 2]$, ce qui entraîne $[0, 1] \lesseqgtr [0, 2]$ et $[0, 2] \lesseqgtr [1, 2]$. Pourtant, $[0, 1] \not\lesseqgtr [1, 2]$, ce qui montre que $\lesseqgtr$ n'est pas transitive : ce n'est pas une relation d'équivalence.
(Elle est symétrique et réflexive).

(viii) La relation d'équipotence $\simeq$ est une relation d'équivalence.

Réflexivité. Soit $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. L'identité $\mathrm{id}_E : E \to E$ est bijective, donc $E \simeq E$.

Symétrie. Soit $E, F \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tels que $E \simeq F$.

On peut donc trouver une bijection $f : E \to F$.

La réciproque $f^{-1} : F \to E$ est alors encore bijective, ce qui montre $F \simeq E$.

Transitivité. Soit $E, F, G \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tels que $E \simeq F$ et $F \simeq G$.

On peut donc trouver deux bijections $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

La composée $g \circ f : E \to G$ est alors bijective, ce qui montre $E \simeq G$.