Relations

Exercice 1 (Clôture réflexive et transitive).
Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E. On définit une relation $\mathcal{R}^*$ sur le même ensemble, en décidant que, pour tous $x, y \in E$, on a $x \mathcal{R}^* y$ si et seulement s'il existe une famille

$$x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = y$$

(où $n \in \mathbb{N}$) telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], x_{i-1} \mathcal{R} x_i$.

1. Montrer que $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$ si et seulement si $\mathcal{R}$ est réflexive et transitive.
2. On suppose $\mathcal{R}$ symétrique. Montrer que $\mathcal{R}^*$ est une relation d'équivalence.
3. On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ par $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), A \mathcal{R} B \Leftrightarrow \big(\exists p \in \mathbb{N} : B = A \cup \{p\}\big)$. Décrire la relation $\mathcal{R}^*$.

Exercice 2.
Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E. Montrer qu'il existe un couple de relations $(\mathcal{R}^s, \mathcal{R}^a)$ sur E tel que $\mathcal{R}^s$ est symétrique, $\mathcal{R}^a$ est antisymétrique et

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \mathcal{R} x_2 \Leftrightarrow \big(x_1 \mathcal{R}^s x_2 \text{ ou } x_2 \mathcal{R}^a x_1\big).$$

Le couple $(\mathcal{R}^s, \mathcal{R}^a)$ est-il unique ?

Relations d'ordre

Exemples

Autocorrection A. ☑
Les relations suivantes sont-elles des relations d'ordre ? Si oui, indiquer si l'ordre est ou non total.

Par ailleurs, s'ils existent, déterminer le minimum, le maximum et les éléments minimaux et maximaux de l'ensemble considéré.

(i) La relation $\ll$ sur $\mathbb{R}_+$, définie par $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \ll y \Leftrightarrow x \leqslant y - 1$.

(ii) La relation $\lesseqqgtr$ sur $\mathbb{R}_+$, définie par $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \underline{\ll} y \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x \leqslant y - 1)$.

(iii) La relation $\lesssim$ sur $\mathbb{R}_+$, définie par $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \lesssim y \Leftrightarrow x \leqslant y + 1$.

(iv) La relation de divisibilité $|$, sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers.

(v) La relation d'inclusion $\subseteq$, sur l'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$.

(vi) La relation $\preccurlyeq$ sur l'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, définie par $\forall A, B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), A \preccurlyeq B \Leftrightarrow |A| \leqslant |B|$.

(vii) La relation $\leqslant$ sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^{\mathbb{R}}$ des fonctions à valeurs positives, définie par

$$\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f \leqslant g \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x)) .$$

(viii) La relation $\leqslant_*$ sur $\mathbb{R}_+^{\mathbb{R}}$, définie par $\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f \leqslant_* g \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant g(x))$.

(ix) La relation $\leqslant_{\text{àpcr}}$ sur $\mathbb{R}_+^{\mathbb{R}}$, définie par $\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f \leqslant_{\text{àpcr}} g \Leftrightarrow (\exists A \in \mathbb{R} : \forall x \geqslant A, f(x) \leqslant g(x))$.

Exercice 3.

1. On définit la relation $\dashv$ sur $\mathbb{C}$ par $\forall z, z' \in \mathbb{C}, z \dashv z' \Leftrightarrow \left(\exists n \in \mathbb{N}, z' = z^{2^n}\right)$.
   Est-ce une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$?
2. Même question en considérant la relation $\dashv$ sur $\mathbb{R}$.
3. Donner un exemple de parties à deux éléments $A \subseteq \mathbb{R}$ qui ne soit pas majorée.

Exercice 4.
On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des couples (E, f), où E est une partie de $\mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ est une application.

On munit $\mathcal{F}$ de la relation $\preccurlyeq$ définie par

$$\forall (I, f), (J, g) \in \mathcal{F}, (I, f) \preccurlyeq (J, g) \Leftrightarrow \left(I \subseteq J \text{ et } g_{|I} = f\right).$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}$.
2. Montrer que toute chaîne de $\mathcal{F}$ est majorée. (On dit que l'ensemble ordonné $(\mathcal{F}, \preccurlyeq)$ est *inductif*).

Exercice 5$^+$.
On considère l'ensemble $E = [\![1, 2n]\!]$ muni de la relation de divisibilité.

1. Une antichaîne $A \subseteq E$ est dite *maximale* si toute antichaîne $A' \supseteq A$ vérifie $A' = A$.
   Donner un exemple, le plus petit possible, d'antichaîne maximale dans E.
2. Montrer que le cardinal maximal d'une antichaîne de E est n.

Théorie

Exercice 6$^+$.
Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné.

- Étant donné une partie $A \subseteq E$, on note

$$\mathcal{M}^+(A) = \{M \in E \mid \forall a \in A, a \leqslant M\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}^-(A) = \{m \in E \mid \forall a \in A, m \leqslant a\}$$

  les ensembles des majorants et des minorants de A, respectivement.
- On définit la *borne supérieure* $\sup(A)$ comme le minimum de $\mathcal{M}^+(A)$, quand celui-ci existe et, de la même façon, la *borne inférieure* $\inf(A)$ comme le maximum de $\mathcal{M}^-(A)$, quand celui-ci existe.

1. Soit $A \subseteq E$ possédant un maximum.
   Montrer que A possède une borne supérieure, et que $\sup(A) = \max(A)$.
2. Soit $f : (E, \leqslant) \to (F, \preccurlyeq)$ une application croissante et $A \subseteq E$. On suppose que A et $f[A]$ admettent une borne supérieure. Montrer que $\sup(f[A]) \leqslant f(\sup(A))$.
3. **Exemples.** Dans les exemples suivants, déterminer si la partie $A \subseteq E$ possède une borne supérieure (resp. inférieure), et la déterminer.

   (i) $(E, \leqslant) = (\mathbb{R}, \leqslant)$ et $A =]0, 1]$;

   (ii) $(E, \leqslant) = (\mathbb{N}, |)$ et $A = \{12, 8\}$;

   (iii) $(E, \leqslant) = (\mathbb{N}, |)$ et $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

   (iv) $(E, \leqslant) = (\mathbb{N}^*, |)$ et $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

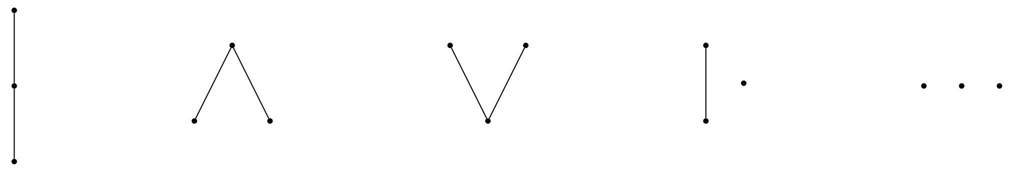
   (i) $(E, \leqslant) = (\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \leqslant)$ et $A = \left\{ f_a : x \mapsto 2a(x-a) + a^2 \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$.
4. Soit Ω un ensemble. Montrer que dans l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(\Omega), \subseteq)$, toute partie possède une borne inférieure et une borne supérieure, que l'on déterminera.
5. On considère l'ensemble $\mathcal{S} = \left\{ X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \;\middle|\; \forall x_1, x_2 \in X, x_1 + x_2 \in X \right\}$ des parties de $\mathbb{N}$ stables par somme, muni de la relation d'inclusion.
   Soit $X_1, X_2 \in \mathcal{S}$. Montrer que la partie $\{X_1, X_2\}$ possède une borne inférieure et une borne supérieure, que l'on précisera.

Exercice 7.

Soit E un ensemble fini non vide, muni d'une relation d'ordre $\leqslant$.

1. Montrer que E possède au moins un élément minimal (resp. maximal).
2. Un *isomorphisme* entre ensembles ordonnés est une bijection croissante, de réciproque croissante.

   Montrer qu'un isomorphisme $f : E \to F$ entre ensembles ordonnés envoie les éléments minimaux (resp. maximaux) de E sur les éléments minimaux (resp. maximaux) de F.
3. **Classification des petits ensembles ordonnés.**
   (a) On suppose $|E| = 3$. Montrer qu'il existe un isomorphisme entre E et l'un (et un seul !) des cinq ensembles ordonnés représentés par les diagrammes de Hasse suivants.



   (b)$^+$ De la même façon, classer les ensembles ordonnés à quatre éléments, à isomorphisme près.

Exercice 8.

Soit $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \sqsubseteq)$ deux ensembles ordonnés. On note $\prec$ et $\sqsubset$ les ordres stricts associés.

Une application $f : E \to F$ est dite *strictement croissante* si $\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \prec x_2 \Rightarrow f(x_1) \sqsubset f(x_2)$.

1. On suppose que $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble totalement ordonné.
   (a) Montrer que toute application strictement croissante $f : E \to F$ est injective.
   (b) Soit $f : E \to F$ strictement croissante et bijective. Montrer que f^{-1} est strictement croissante.
2. Montrer que les deux résultats précédents sont faux si l'on ne suppose pas que $\preccurlyeq$ est total.
3. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné. On munit $\mathcal{P}(E)$ de la relation d'inclusion. Montrer que

$$Y : \begin{cases} E \to & \mathcal{P}(E) \\ x \mapsto & \{t \in E \,|\, t \preccurlyeq x\} \end{cases}$$

   est une application strictement croissante injective (c'est le *plongement de Yoneda*).

Exercice 9$^+$.

1. **Théorème d'extension de Szpilrajn.** Soit $(E, \dashv)$ un ensemble ordonné et $a, b \in E$ deux éléments incomparables.

   Montrer qu'il existe une relation d'ordre $\leqslant$ sur E telle que

$$\forall x, y \in E, (x \dashv y \text{ ou } (x, y) = (a, b)) \Rightarrow x \leqslant y.$$

2. Soit $(E, \dashv)$ un ensemble ordonné fini. Montrer qu'il existe une famille $(\leqslant_1, \dots, \leqslant_r)$ d'ordres totaux sur E tels que

$$\forall x, y \in E, x \dashv y \Leftrightarrow \big(x \leqslant_1 y \text{ et } x \leqslant_2 \text{ et } \cdots \text{ et } x \leqslant_r y\big).$$

   On dira que la famille $(\leqslant_1, \dots, \leqslant_r)$ *réalise* l'ordre $\dashv$.
3. On considère dans cette question un entier $n \in \mathbb{N}$ et l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}([\![1, n]\!]), \subseteq)$.
   (a) Montrer qu'il existe une famille $(\leqslant_1, \dots, \leqslant_n)$ d'ordres totaux sur $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$ réalisant $\subseteq$.
   (b)$^{++}$ Montrer qu'il n'existe pas de famille $(\leqslant_1, \dots, \leqslant_r)$ d'ordres totaux sur $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$ réalisant $\subseteq$, si $r < n$.

   Les deux questions précédentes montrent que l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ est de *dimension* n.

Relations d'équivalence

Exemples

Autocorrection B.

Les relations suivantes sont-elles des relations d'équivalence ?

(i) La relation $=_*$ définie sur $\mathbb{R}^n$ (où $n \geqslant 2$) par $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x =_* y \Leftrightarrow \exists i \in [\![1, n]\!], x_i = y_i$.

(ii) La relation $\leftrightarrow$ définie sur $\mathbb{R}^n$ (où $n \geqslant 2$) par $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \leftrightarrow y \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{R}) : y = Px$.

(iii) La relation $=_{\text{àpcr}}$ définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $\forall u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u =_{\text{àpcr}} v \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, u_n = v_n$.

(iv) La relation $\sim$ sur l'ensemble $(\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ des suites ne s'annulant pas, définie par

$$\forall u, v \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}, u \sim v \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

(v) La relation $\parallel$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \parallel B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.

(vi) La relation $\between$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \between B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$.

(vii) La relation $\lesseqgtr$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \lesseqgtr B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ ou } B \subseteq A)$.

(viii) La relation d'équipotence $\simeq$ sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{C}$ par $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \mathcal{R} z_2 \Leftrightarrow z_1^n = z_2^n$.

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et déterminer, pour $z \in \mathbb{C}$, le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de z.

Exercice 11.

Soit E un ensemble et $A \subseteq E$.

On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. On suppose E fini. Combien $\mathcal{R}$ a-t-elle de classes d'équivalence ?

Exercice 12.

Que dire d'une relation d'équivalence $\approx$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leqslant \varepsilon \Rightarrow x \approx y \ ?$$

Exercice 13$^+$.

Soit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ un ensemble de parties. On définit une relation $\cong_{\mathcal{F}}$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par

$$\forall f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), f \cong_{\mathcal{F}} g \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{F} : f_{|A} = g_{|A}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathcal{F}$ pour que $\cong_{\mathcal{F}}$ soit une relation d'équivalence.

Exercice 14.

On définit sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ la relation $\sim$ par

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), A \sim B \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : A \setminus [\![0, n]\!] = B \setminus [\![0, n]\!].$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe d'équivalence de $\varnothing$ et de $\mathbb{N}$.
3. $^+$ Construire une famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ deux à deux non équivalents.
4. $^{+++}$ Construire une famille $(A_i)_{i \in \mathcal{P}(\mathbb{N})}$ d'éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ deux à deux non équivalents.

Partitions

Exercice 15. ☑

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}$ strictement croissante (pour l'inclusion, c'est-à-dire telle que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subsetneq A_{n+1}$). À quelle condition la famille $(A_{n+1} \setminus A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une partition de $\mathbb{R}$?

Exercice 16.

Soit X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Pour tout $y \in Y$, on définit $A_y = f^{-1}[\{y\}] \subseteq X$.

1. Montrer que la famille $(A_y)_{y\in Y}$ est un recouvrement disjoint de X.
2. À quelle condition est-ce une partition de X ?

Théorie

Exercice 17.

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation transitive et symétrique.

La démonstration suivante semble montrer qu'alors $\mathcal{R}$ est aussi réflexive, rendant la définition des relations d'équivalence donnée en cours inutilement redondante.

> Soit $x, y \in E$ tels que $x \mathcal{R} y$.
> - Par symétrie, on a donc également $y \mathcal{R} x$.
> - Par transitivité, on en déduit donc $x \mathcal{R} x$.
>
> On a ainsi montré $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$, ce qui montre que $\mathcal{R}$ est réflexive.

Qu'en penser ?

Exercice 18.

Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont deux relations sur un ensemble E, on définit leur composée $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ (qui est une relation) en disant que deux éléments $x, z \in E$ vérifient $x\ (\mathcal{R} \circ \mathcal{S})\ z$ si et seulement si

$$\exists y \in E : x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{S} z.$$

1. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Déterminer $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$.
2. On dit que deux relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ *commutent* si $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.
   On suppose que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont des relations d'équivalence. Montrer que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ commutent si et seulement si $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
3. On dit que deux relations d'équivalence $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont *indépendantes* si
   $$\forall a, b \in E, \exists c \in E : a \mathcal{R} c \text{ et } b \mathcal{S} c.$$
   Donner un exemple non trivial de relations d'équivalence indépendantes et un exemple non trivial de relations d'équivalence non indépendantes.
4. Montrer que deux relations d'équivalence indépendantes commutent toujours.
5. Montrer le *théorème de Dubreil-Jacotin (1939)* : deux relations d'équivalence $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ commutent si et seulement si on peut trouver une partition $E = \bigcup_i E_i$ telles que :
   (i) chaque E_i est une union de classes de $\mathcal{R}$ et également une union de classes de $\mathcal{S}$;
   (ii) pour tout i, les relations induites par $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sur E_i sont indépendantes.

Mélange (et ensembles quotients)

Exercice 19$^+$ (Préordres).

1. Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\sim$. On suppose l'ensemble quotient $E/\sim$ muni d'une relation d'ordre $\leqslant$.
   Montrer que la relation $\leqslant^\sim$ définie sur E par
   $$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \leqslant^\sim x_2 \Leftrightarrow [x_1]_\sim \leqslant [x_2]_\sim$$
   est une relation réflexive et transitive.
2. Réciproquement, soit E un ensemble muni d'une relation $\preccurlyeq$ réflexive et transitive.
   (a) Montrer que la relation $\sim$ définie sur E par
   $$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \big(x_1 \preccurlyeq x_2 \text{ et } x_2 \preccurlyeq x_1\big)$$
   est une relation d'équivalence.
   (b) Montrer qu'il existe une relation d'ordre $\preccurlyeq^\bullet$ sur $E/\sim$ telle que
   $$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \preccurlyeq x_2 \Leftrightarrow [x_1]_\sim \preccurlyeq^\bullet [x_2]_\sim.$$
3. Identifier la relation $\sim$, l'ensemble quotient $E/\sim$ et la relation d'ordre $\preccurlyeq^\bullet$ dans les cas suivants :
   (i) $E = \mathbb{Z}$ et $\preccurlyeq$ est la relation de divisibilité ;
   (ii) $E = \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ et $\preccurlyeq$ est la relation définie par $\forall A, B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), A \preccurlyeq B \Leftrightarrow |A| \leqslant |B|$;
   (iii) $E = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\preccurlyeq$ est la relation définie par $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \cup \mathbb{R}^- \subseteq B \cup \mathbb{R}^-$.

Exercice 20^{++}.

- Étant donné deux ensembles totalement ordonnés $(E, \leqslant_E)$ et $(F, \leqslant_F)$, on munit le produit cartésien $E \times F$ de la relation $\leqslant_{lex}$ définie par
  $$\forall (e_1, f_1), (e_2, f_2) \in E \times F, (e_1, f_1) \leqslant_{lex} (e_2, f_2) \Leftrightarrow \big(e_1 <_E e_2 \text{ ou } (e_1 = e_2 \text{ et } f_1 \leqslant_F f_2)\big).$$
- Étant donné un ensemble totalement ordonné $(X, \leqslant_X)$, et deux éléments $x_1, x_2 \in X$, on définit *l'intervalle ouvert* $]x_1, x_2[_X = \{x \in X \mid x_1 <_X x <_X x_2\}$. L'ensemble ordonné est alors dit *discret et sans extrémité* si $\forall x \in X, \exists x^-, x^+ \in X : \big]x^-, x^+\big[_X = \{x\}$.
- Un *isomorphisme* entre ensembles ordonnés est une bijection croissante de réciproque croissante.

1. Montrer que $\leqslant_{lex}$ est une relation d'ordre total.
2. Montrer que si $(F, \leqslant_F)$ est discret et sans extrémité, alors $(E \times F, \leqslant_{lex})$ l'est également.
3. Soit $(X, \leqslant_X)$ un ensemble ordonné discret sans extrémité.
   (a) Soit $x \in X$. Montrer qu'il existe un unique couple $(x^-, x^+) \in X$ tels que $\big]x^-, x^+\big[_X = \{x\}$.
   On définit les relations $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ sur X par
   $$\forall x_1, x_2 \in X, \begin{cases} x_1 \rightarrow x_2 \Leftrightarrow \big(x_1 \leqslant_X x_2 \text{ et }]x_1, x_2[_X \text{ fini}\big) \\ x_1 \leftrightarrow x_2 \Leftrightarrow \quad \big(x_1 \rightarrow x_2 \text{ ou } x_2 \rightarrow x_1\big). \end{cases}$$
   (b) Montrer que $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence sur X.
   (c) Montrer que, pour tout $x \in X$, il existe une application strictement croissante $\iota_x : \mathbb{Z} \rightarrow X$ dont l'image est la classe d'équivalence $[x]_\leftrightarrow$.
   (d) Montrer qu'il existe une relation d'ordre total $\leqslant^\bullet$ sur l'ensemble quotient $X^\bullet = X/\leftrightarrow$ telle que la surjection canonique $(X, \leqslant_X) \rightarrow (X^\bullet, \leqslant^\bullet)$ soit croissante.
   (e) Montrer qu'il existe un isomorphisme entre $(X, \leqslant_X)$ et $(X^\bullet \times \mathbb{Z}, \leqslant^\bullet)$.