Groupes

Magmas et monoïdes

Autocorrection A. ☑

Soit $(M, \cdot)$ un monoïde. On définit

$$M^\times = \{m \in M \mid \exists n \in M : mn = nm = 1_M\}$$

l'ensemble des *inversibles* de M.

Montrer que $(M^\times, \cdot)$ est un groupe.

Exercice 1 (Argument d'Eckmann-Hilton). ☑

Soit X un ensemble muni de deux lois de composition internes $*$ et $\otimes$. On suppose que chacune des deux lois possède un élément neutre et que

$$\forall a, b, c, d \in X, (a \otimes b) * (c \otimes d) = (a * c) \otimes (b * d).$$

1. Montrer que les deux lois $*$ et $\otimes$ ont le même élément neutre.
2. Montrer que les deux lois sont identiques.
3. Montrer que les deux lois sont commutatives et associatives.

Exercice 2.

Soit $(E, *)$ un magma. On définit la partie

$$A = \left\{x \in E \,\middle|\, \forall y, z \in E, x * (y * z) = (x * y) * z\right\} \subseteq E.$$

Montrer que cette partie est stable sous la loi $*$, et que le magma $(A, *)$ est associatif.

Exercice 3.

Soit $(E, *)$ un magma. On suppose que toute bijection $E \to E$ est un morphisme de magmas.

Montrer que E est fini, de cardinal 0, 1 ou 3.

On donnera également un exemple de magma possédant cette propriété pour chacun de ces trois cardinaux.

Exercice 4.

Soit G un monoïde tel que $\forall x \in G, \exists y \in G : xy = 1_G$ (tout élément est inversible à droite).

Montrer que G est un groupe.

Exercice 5.

Soit $(M, \leftthreetimes)$ un monoïde. On définit la *loi opposée* : $\rightthreetimes : \begin{cases} M \times M \to & M \\ (x, y) & \mapsto x \rightthreetimes y = y \leftthreetimes x. \end{cases}$

1. Montrer que $(M, \rightthreetimes)$ est un monoïde.
2. Donner un exemple où les monoïdes $(M, \leftthreetimes)$ et $(M, \rightthreetimes)$ ne sont pas isomorphes (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de morphisme de monoïdes bijectif entre les deux).
3. On suppose que $(M, \leftthreetimes)$ est un groupe. Montrer que $(M, \rightthreetimes)$ est également un groupe, et que les deux sont isomorphes.

Groupes – manipulations formelles

Autocorrection B. ☑

Les magmas suivants sont-ils des groupes ? S'ils le sont, déterminer s'ils sont abéliens.

(i) L'ensemble $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \ldots, \mathtt{z}\}^*$ des chaînes de caractères utilisant les vingt-six lettres minuscules (y compris la chaîne vide ""), muni de l'opération de concaténation $+$.

(ii) L'ensemble $M_2(\mathbb{Z})$ des matrices carrées 2×2, à coefficients entiers, muni du produit matriciel.

(iii) L'ensemble $SL_2(\mathbb{Z}) = \{M \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \operatorname{dét} M = 1\}$, muni du produit matriciel.

(iv) L'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$, muni du produit matriciel.

(v) L'ensemble $\mathbb{R}$, muni de l'opération $\vee$ définie par $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \vee y = \max(x, y)$.

(vi) L'ensemble $\mathbb{U}_\infty = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}^* : z^n = 1\}$ des racines de l'unité, muni du produit.

Exercice 6.

Soit G un groupe et $x, y \in G$ tels que $xyx = y^3$ et $y^5 = 1_G$.

Montrer que x et y commutent, puis que $x^2 = y^2$.

Exercice 7. ☑

Soit G un groupe tel que $\forall x \in G, g^2 = 1_G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 8.

Soit E un ensemble. On munit $\mathcal{P}(E)$ de la *différence symétrique*

$$\triangle : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \to & \mathcal{P}(E) \\ \quad (A, B) \quad \mapsto & A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B). \end{cases}$$

Montrer que $(\mathcal{P}(E), \triangle)$ est un groupe abélien.

Sous-groupes

Autocorrection C. ☑

Soit G un groupe et $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion) de sous-groupes de G.

Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ est un sous-groupe de G.

Autocorrection D. ☑

Soit G un groupe.

1. Pour tout $g \in G$, on définit le *centralisateur* de g :

$$C_G(g) = \{h \in G \mid gh = hg\}.$$

   (a) Montrer que $C_G(g)$ est un sous-groupe de G.

   (b) Soit φ un automorphisme de G. Montrer que $\varphi[C_G(g)] = C_G(\varphi(g))$.

2. On définit le *centre* de g :

$$Z(G) = \{h \in G \mid \forall g \in G, gh = hg\}.$$

   (a) Montrer que Z(G) est un sous-groupe de G.

   (b) Soit φ un automorphisme de G. Montrer que $\varphi[Z(G)] = Z(G)$.
   (On dit que Z(G) est un sous-groupe *caractéristique* de G.)

Exercice 9.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que *l'ensemble des périodes* de f
$$\text{Pér}(f) = \left\{ T \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x) \right\}$$
est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
2. Réciproquement, soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
Construire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\text{Pér}(f) = G$.

Exercice 10.

1. Soit G un groupe et $H_1, H_2 \subseteq G$ deux sous-groupes.
Montrer que $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H_1 \subseteq H_2$ ou $H_2 \subseteq H_1$.
2. Montrer qu'un groupe ne peut pas être l'union de deux sous-groupes stricts.
3. Donner un exemple de groupe qui soit l'union de trois sous-groupes stricts.

Exercice 11$^+$.
Soit G un groupe qui possède un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini.

Morphismes

Exercice 12 (Transport de structure).

1. Soit $(G, *)$ un groupe, E un ensemble et $f : G \to E$ une bijection. Montrer que la loi $\star$ définie par
$$\forall x, y \in E, x \star y = f\big(f^{-1}(x) * f^{-1}(y)\big)$$
munit E d'une structure de groupe isomorphe à $(G, *)$.
2. Quels ensembles finis peuvent-ils être munis d'une structure de groupe ?
3. Montrer que la loi $\star$ définie par
$$\forall x, y \in \left]-1, 1\right[, x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$$
munit $\left]-1, 1\right[$ d'une structure de groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 13.

1. Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Montrer que l'application $g \mapsto g^2$ est un morphisme de groupes si et seulement si G est abélien.
2. En déduire que dans un groupe abélien fini d'ordre impair, tout élément est un carré, c'est-à-dire que $\forall y \in G, \exists x \in G : x^2 = y$.
3. La propriété reste-t-elle vraie dans un groupe non abélien fini d'ordre impair ?

Exercice 14 (Décomposition en produit direct).
Soit G un groupe et H_1, H_2 deux sous-groupes de G tels que $H_1 \cap H_2 = \{1_G\}$, $\langle H_1 \cup H_2 \rangle = G$ et $\forall x_1 \in H_1, \forall x_2 \in H_2, x_1 x_2 = x_2 x_1$.

Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{cases} H_1 \times H_2 \to & G \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1 x_2 \end{cases}$$

(où le domaine est muni de sa structure de groupe produit) est un isomorphisme.

Exercice 15.
Montrer que le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ n'est pas isomorphe au groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Exercice 16.
Montrer que le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ est isomorphe au groupe produit $\mathbb{U} \times \mathbb{R}$.

Exercice 17.

1. Décrire les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.
2. Décrire les morphismes de groupes de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 18.
Soit F un groupe fini. Montrer que tout morphisme de groupes $\mathbb{Q} \to F$ est constant.

Exercice 19$^+$.
Soit $n, m \in \mathbb{N}$.

1. Soit F un groupe fini. Montrer que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, F)$ est fini.
2. Plus précisément, montrer que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ possède 2^n éléments.
3. Déduire de la question précédente que $\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{Z}^m$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.

Exercice 20 (Théorème de plongement de Cayley).
Soit G un groupe. Pour tout $g \in G$, on considère l'application

$$\sigma_g : \begin{cases} G \to & G \\ x & \mapsto gx. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $g \in G$, σ_g est une bijection, puis que $g \mapsto \sigma_g$ définit un morphisme de groupes injectif $G \to \mathfrak{S}(G)$.

Parties génératrices, ordres des éléments, groupes finis

Autocorrection E.
Quel est le sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ engendré par les deux nombres complexes i et j ?

Autocorrection F.
Soit G un groupe et $x, y \in G$.

1. Montrer que si x est d'ordre fini, alors x^{-1} également, et que leurs ordres sont les mêmes.
2. Montrer que si x est d'ordre fini, alors yxy^{-1} également, et que leurs ordres sont les mêmes.
3. Montrer que si xy est d'ordre fini, alors yx également, et que leurs ordres sont les mêmes.

Exercice 21.

Un groupe G est dit *de type fini* s'il admet une partie génératrice finie.

1. Montrer que tout groupe de type fini peut s'écrire sous la forme d'une union $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties finies de G.
   Remarque. Par des arguments usuels de théorie des ensembles, cela montre que G est fini ou équipotent à $\mathbb{N}$.
2. Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est-il de type fini ?

Exercice 22.

Soit G un groupe non trivial dont les seuls sous-groupes sont $\{1_G\}$ et G.

Montrer que G est cyclique, d'ordre premier.

Exercice 23.

Montrer que tout sous-monoïde d'un groupe fini en est un sous-groupe.

Exercice 24$^+$.

1. Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p. Montrer que G est cyclique.
2. Classer à isomorphisme près tous les groupes finis dont le cardinal est $\leqslant 7$.

Exercice 25$^+$. *X (détaillé)*

Soit G un groupe de cardinal 8 non abélien.

1. Montrer qu'il existe un élément $x \in G$ d'ordre 4.
2. Soit $y \in G \setminus \langle x\rangle$. Montrer que x et y engendrent G, et en déduire que x et y ne commutent pas.
3. Montrer que $G = \langle x\rangle \sqcup y\langle x\rangle$, que $yxy^{-1} \in \langle x\rangle$, puis que $yxy^{-1} = x^{-1}$.
4. Montrer qu'il n'existe, à isomorphisme près, que deux groupes non abéliens d'ordre 8.

Exercice 26. *Lyon (détaillé)*

Soit G un groupe fini de cardinal $2n$.

1. Soit H un sous-groupe de G de cardinal n. Montrer que l'application
$$\varphi : \begin{cases} G \to & \mathbb{U}_2 \\ g \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } g \in H \\ -1 & \text{si } g \notin H \end{cases} \end{cases}$$
   est un morphisme de groupes.
2. Utiliser la question précédente pour montrer que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$ possède exactement $2^d - 1$ sous-groupes de cardinal 2^{d-1}.
3. Montrer qu'il est impossible que G possède exactement deux sous-groupes de cardinal n.

Exercice 27.

1. Soit G un groupe fini.
   Montrer que, pour tout $g \in G$, l'ensemble $\left\{(h, k) \in G^2 \,\middle|\, hk = g\right\}$ est de cardinal $|G|$.
2. Soit $G \subseteq GL_n(\mathbb{K})$ un sous-groupe fini. Montrer que la matrice $M = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g\in G} g$ vérifie $M^2 = M$.

Exercice 28.
Soit G un sous-groupe fini abélien de $GL_n(K)$.

Montrer que le produit de tous les éléments de G est $(-1)^r I_n$, où r est le nombre d'éléments d'ordre 2 de G.

Exercice 29 (Théorème de Cauchy en 2).
Soit G un groupe fini.

1. Montrer que $i : x \mapsto x^{-1}$ est une involution $G \to G$. Quels sont ses points fixes ?
2. Montrer que si l'ordre de G est pair, alors G possède un élément d'ordre pair.

Exercice 30$^+$ (Rang d'un groupe fini).
Étant donné un groupe fini G, on définit son *rang* $\mathrm{rg}(G)$ comme le minimum des cardinaux des parties génératrices de G.

1. Soit $n \geqslant 2$. Montrer $\mathrm{rg}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 1$, $\mathrm{rg}\left((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2\right) = \mathrm{rg}(\mathfrak{S}(3)) = 2$.
2. Soit G_1 et G_2 deux groupes finis.
   (a) Montrer $\mathrm{rg}(G_1 \times G_2) \leqslant \mathrm{rg}(G_1) + \mathrm{rg}(G_2)$.
   (b) Montrer que l'inégalité précédente est stricte dans le cas où $G_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $G_2 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
3. Soit G un groupe fini. Montrer que $\mathrm{rg}(G) \leqslant \log_2(|G|)$.
4. Soit $d \in \mathbb{N}$. Donner un exemple de groupe de rang d et de cardinal 2^d.

Exercice 31$^+$.
Soit A et B deux parties d'un groupe fini G. On suppose $|A| + |B| > |G|$.

1. Montrer que $G = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.
2. Montrer que la question précédente devient fausse si on remplace, dans l'hypothèse, l'inégalité stricte par une inégalité large.

Exercice 32^{++}.
Soit G un groupe fini non abélien. On note $Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G, xy = xy\}$ son *centre*.

1. Montrer que $|G| \geqslant 4\,|Z(G)|$.
2. Montrer que la probabilité pour deux éléments de G de commuter est $\leqslant \dfrac{5}{8}$, c'est-à-dire que

$$\left|\left\{(x,y) \in G^2 \,\middle|\, xy = xy\right\}\right| \leqslant \frac{5}{8}.$$

Exercice 33^{++}.
Soit H un sous-groupe strict d'un groupe fini G. On note, pour $x \in G$, $xHx^{-1} = \left\{xhx^{-1} \,\middle|\, h \in G\right\}$.

1. Montrer que la relation $\sim$ définie sur G par $\forall x_1, x_2 \in G, x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1Hx_1^{-1} = x_2Hx_2^{-1}$ est une relation d'équivalence, et que son nombre de classes est $\leqslant \dfrac{|G|}{|H|}$.
2. En déduire $\displaystyle\bigcup_{x \in G} xHx^{-1} \neq G$.

Exemples

Exercice 34.

1. On note $\Sigma = \left\{ \begin{cases} \mathbb{C} \to & \mathbb{C} \\ z \mapsto & az+b \end{cases} \middle| \, (a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \right\}$ l'ensemble des similitudes directes.
   Montrer que $(\Sigma, \circ)$ est un groupe.
2. Déterminer les classes de conjugaison de Σ.

Exercice 35 (Groupe des quaternions Q_8).
Dans cette exercice, on note 1 la matrice identité (habituellement notée I_2) et on définit les trois matrices $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = IJ$, toutes trois éléments de $GL_2(\mathbb{C})$.

1. Montrer que le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par I et J est $Q_8 = \{1, -1, I, -I, J, -J, K, -K\}$.
2. Dresser la table de multiplication de Q_8.
3. Déterminer l'ordre de chaque élément, et les classes de conjugaison du groupe.

Exercice 36$^+$.

1. On note
$$\sigma : \begin{cases} \mathbb{Z} \to & \mathbb{Z} \\ x \mapsto & -x \end{cases} \quad \text{et } \tau : \begin{cases} \mathbb{Z} \to & \mathbb{Z} \\ x \mapsto & 1-x. \end{cases}$$
   Montrer que $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}(\mathbb{Z})$, calculer $\gamma = \tau \circ \sigma$ et, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, $\sigma^{-1} \circ \gamma^n \circ \sigma$.
2. On considère l'ensemble
$$G = \{\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}, \sigma, \tau, \sigma \circ \tau, \tau \circ \sigma, \sigma \circ \tau \circ \sigma, \tau \circ \sigma \circ \tau, \dots\}.$$
   Montrer que $G = \{\gamma^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\sigma \circ \gamma^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$.
3. En déduire que G est un sous-groupe de $\mathfrak{S}(\mathbb{Z})$.
4. Décrire explicitement G.
5. Décrire le *centre* de G, c'est-à-dire $Z(G) = \{g \in G \,|\, \forall h \in G, g \circ h = h \circ g\}$.
6. Déterminer tous les morphismes $G \to \mathbb{U}_2$.
7. Soit $g \in G \setminus \{1_G\}$. Montrer que g est d'ordre fini si et seulement s'il est conjugué à σ ou τ.

Exercice 37$^+$ (Groupe diédral). ☑
Soit $n \geqslant 3$. Soit D_{2n} l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{U}_n \to \mathbb{U}_n$ telles que
$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}_n, |f(z_1) - f(z_2)| = |z_1 - z_2|.$$

1. Montrer que $(D_{2n}, \circ)$ est un groupe.
2. Déterminer l'ordre de l'élément $r : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{n}} z$.
3. Montrer que $\mathrm{id}_{\mathbb{U}_n}$ est le seul élément $f \in D_{2n}$ tel que $f(1) = 1$ et $f\left(\exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)\right) = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$.
4. Décrire explicitement D_{2n}. Quel est son ordre ?
5. D_{2n} est-il commutatif ?
6. Déterminer tous les éléments d'ordre 2 de D_{2n} et exprimer l'élément r comme composée de deux tels éléments.
7. Déterminer tous les morphismes $D_{2n} \to \mathbb{U}_2$. (On pourra commencer par le cas n impair, puis par le cas $n = 4$).

Exercice 38$^+$. X 💡

Soit G l'ensemble des applications affines bijectives $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe.
2. Soit Γ un sous-groupe de G tel que $\forall f \in \Gamma, \exists \omega \in \mathbb{R} : f(\omega) = \omega$.
   Montrer que $\exists \omega \in \mathbb{R} : \forall f \in \Gamma, f(\omega) = \omega$.