Anneaux, corps

Exercice 1.

On pourra chercher à appliquer certaines assertions à $1 + x$ ou à $1 + y$.

Exercice 4.

On pourra constater que, pour tout $x \in A$, les deux ensembles

$$C^{\pm}(x) = \{y \in A \mid xy = \pm yx\}$$

sont des sous-groupes de $(A, +)$.

Exercice 17.

Pour l'exemple final, on pourra chercher un sous-anneau de $\mathcal{P}(E)$ dans lequel l'ensemble $\mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ n'a, pour la relation $\preccurlyeq$, pas d'élément minimal.

Exercice 19.

Pour déterminer les morphismes $\rho : K \to \mathbb{C}$, on s'interrogera sur ce que peut valoir $\rho(\sqrt[3]{2})$.

Exercice 24.

Pour la première question, on pourra utiliser le lemme de Gauss (ou d'Euclide) vu en cours d'arithmétique en terminale.

Exercice 25.

On pourra par exemple faire une disjonction de cas suivant la caractéristique de K, et raisonner sur l'ordre des éléments des deux groupes.

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) On a $1 \in \mathbb{N}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$: l'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas stable par passage à l'opposé, donc pas un sous-anneau de $\mathbb{Z}$ (ce n'est même pas un sous-groupe additif).
Il est néanmoins vrai qu'il contient 1 et qu'il est stable par somme et produit.

(ii) L'ensemble B des nombres décimaux contient clairement 1 et est tout aussi clairement stable par passage à l'opposé.
Soit maintenant $a, b \in B$. On peut donc trouver $k, \ell \in \mathbb{Z}$ et $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $a = \dfrac{k}{10^n}$ et $b = \dfrac{\ell}{10^m}$. Quitte à échanger le rôle de a et b (ce qui est honnête, $\mathbb{R}$ étant un anneau commutatif), on peut supposer $n \leqslant m$. On peut alors également écrire $a = \dfrac{10^{m-n}\, k}{10^m}$. On a alors

- $a + b = \dfrac{10^{m-n}\, k + \ell}{10^m} \in B\,;$
- $ab = \dfrac{k\,\ell}{10^{n+m}} \in B,$

donc B est stable par somme et produit.
On en déduit que B est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

(iii) On a $I_2 \notin B$, qui n'est donc pas un sous-anneau de $M_2(\mathbb{R})$.
Il est néanmoins vrai que B est stable par somme, passage à l'opposé et produit.

(iv) On a $E_{1,1}$ et $E_{1,2} + E_{2,1} \in S_n(\mathbb{R})$ mais $E_{1,1}(E_{1,2} + E_{2,1}) = E_{1,2} \notin S_n(\mathbb{R})$, donc $S_n(\mathbb{R})$ n'est pas stable par produit, et n'est donc pas un sous-anneau de $M_n(\mathbb{R})$.
Il est néanmoins vrai que $S_n(\mathbb{R})$ contient I_n, qu'il est stable pas somme et par passage à l'opposé.
(Cette réponse suppose tacitement $n \geqslant 2$. Dans les cas dégénérés $n \leqslant 1$, on a $S_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ et la réponse est tautologiquement oui).

(v) On vérifie sans difficulté que $M_n(\mathbb{R})$ est un sous-anneau de $M_n(\mathbb{C})$.

(vi) L'élément neutre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite constante égale à 1, qui ne converge pas vers 0 : B n'est donc pas un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Il est néanmoins vrai que B est stable par somme, passage à l'opposé et produit.

(vii) La suite $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à B ; pourtant, $(1)_{n\in\mathbb{N}} + (1)_{n\in\mathbb{N}} = (2)_{n\in\mathbb{N}}$ n'appartient pas à B, qui n'est donc pas stable par somme et donc pas un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Il est néanmoins vrai que B contient $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et qu'il est stable par passage à l'opposé et produit.

(viii) Il est clair que la suite constante $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers 1).
Le fait que B soit stable par somme, passage à l'opposé et produit fait partie des propriétés de base de la convergence, que l'on verra bientôt.
B est donc bien un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(ix) On vérifie sans difficulté que B est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Autocorrection B.

1. La réponse est oui.
Soit $x \in B^{\times}$.
On peut donc trouver $y \in B$ tel que $xy = yx = 1_A$.
Comme $B \subseteq A$, on a également $y \in A$, donc $x \in A^{\times}$.
2. La réponse est non.
L'inclusion $B^{\times} \subseteq A^{\times} \cap B$ est une conséquence directe de la question précédente, mais l'inclusion réciproque est fausse en général.
Le problème est qu'un élément de $A^{\times} \cap B$ est un élément de B possédant un inverse **dans** A, mais qu'il n'y a aucune garantie pour que cet inverse soit dans B.
Par exemple, $\mathbb{Z}^{\times} = \{\pm 1\} \neq \mathbb{R}^{\times} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Autocorrection C.

(i) L'élément neutre multiplicatif de $\mathbb{R}^2$ est le couple $(1, 1)$.
Quel que soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(x, y)(1, 0) = (x, 0) \neq (1, 1)$, donc l'élément non nul $(1, 0)$ n'est pas inversible.
Cela montre que $\mathbb{R}^2$ n'est pas un corps (il n'est même pas intègre : $(1, 0)(0, 1) = (0, 0)$).

(ii) On a $3 \in D$ mais 3 n'est pas inversible (il est inversible dans $\mathbb{R}$, par exemple, mais $\frac{1}{3} \notin D$, ce qui montre que 3 n'a pas d'inverse dans D).
Cela montre que D n'est pas un corps.

(iii) On vérifie assez facilement qu'il s'agit bien d'un anneau commutatif.

En revanche, ce n'est pas un corps. En effet, un élément inversible de cet anneau doit *a fortiori* être une matrice inversible.

Or, comme $\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 - b^2$, on vérifie facilement que, par exemple, l'élément non nul $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de l'anneau n'est pas inversible.

(iv) Comme $\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$, on raisonne comme à la question précédente et on obtient que l'élément non nul $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible : cet anneau n'est pas un corps.

(v) Comme $\det \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + 2b^2$, on raisonne comme aux deux questions précédentes : $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est un élément non nul mais non inversible, et cet anneau n'est pas un corps.

(vi) Vérifions qu'il s'agit bien d'un corps (on vérifie déjà facilement qu'il s'agit bien d'un anneau commutatif).

Soit M un élément non nul de l'anneau. On peut donc trouver $a, b \in \mathbb{Q}$ non tous deux nuls tels que $M = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$.

- On a alors $\det M = a^2 - 2b^2$.
  - Si $b = 0$, on a $a \neq 0$ (car $(a, b) \neq (0, 0)$), donc $\det M = a^2 \neq 0$.
  - Si $b \neq 0$, on a $\det M = b^2 \left(\left(\frac{a}{b} \right)^2 - 2 \right) = b^2 \left(\frac{a}{b} - \sqrt{2} \right) \left(\frac{a}{b} + \sqrt{2} \right)$.

    Comme ni $\sqrt{2}$ ni son opposé ne sont rationnels, on a donc $\det M \neq 0$.

  Cela montre que la matrice est inversible (mais pas encore qu'elle est inversible dans l'anneau considéré !).
- Il reste alors à vérifier que M^{-1} est bel et bien un élément de cet anneau, ce qui se déduit immédiatement du calcul

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} a & -2b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/\delta & -2b/\delta \\ -b/\delta & a/\delta \end{pmatrix},$$

  où l'on a noté $\delta = \det M$.