Polynômes

Exercice 1.
Dans tous les cas, on pourra raisonner par analyse et synthèse et considérer rapidement le degré des polynômes en jeu.

Exercice 5.
On pourra se souvenir de la factorisation de $a^3 - b^3$...

Exercice 6.
On pourra commencer par montrer l'existence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'un polynôme Q_k vérifiant l'égalité $P(X)^k - X^k = Q_k(X)\big(P(X) - X\big)$.

Exercice 11.
On peut commencer par exprimer cette somme en fonction d'une somme indexée par les entiers de 0 à $n+1$. Ensuite, utiliser une expression de $(a-b)^2$ en fonction de a^2, b^2 et $(a+b)^2$.

Exercice 12.
Pour la deuxième question, on pourra entre autres chercher une variante de la formule de convolution de Vandermonde qui peut aider.

Exercice 16.
On pourra considérer le polynôme $\overline{P}$, convenablement défini.

Exercice 30.
Pour la deuxième question, on cherchera à définir des polynômes auxiliaires auxquels appliquer la première question.

Notamment, on se demandera comment fabriquer un polynôme dont les racines sont les inverses des racines de P.

Exercice 45.
On pourra raisonner sur les degrés, et remarquer que l'ensemble des couples cherchés possède des propriétés d'invariance.

Exercice 51.
Comment trouveriez-vous un tel A si P était un polynôme explicite ?

Exercice 53.
On peut raisonner en termes de tableaux de variations, ou chercher **le** résultat du cours qui donne le résultat immédiatement.

Exercice 56.
On pourra utiliser la formule explicite du polynôme interpolateur.

Autocorrection

Autocorrection A.

On a

$$\begin{aligned} PQ &= 2X^5 - X^4 \quad + X^3 \\ &\qquad - 2X^4 + X^3 \quad - X^2 \\ &\qquad\qquad + 6X^3 - 3X^2 + 3X \\ &\qquad\qquad\qquad - 2X^2 + X \quad - 1 \\ &= 2X^5 - 3X^4 + 8X^3 - 6X^2 + 4X - 1. \end{aligned}$$

Par exemple en écrivant P^2 comme $P \times P$, ou en utilisant la formule $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < i \leqslant n} a_i a_j$, on obtient

$$\begin{aligned} P^2 &= X^6 - 2X^5 + 7X^4 - 8X^3 + 11X^2 - 6X + 1 \\ \text{et, de même, } Q^2 &= 4X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 2X + 1. \end{aligned}$$

Enfin, après calculs, (en développant notamment $(2X^2 - X + 1)^3 = (2X^2 - X + 1)^2 \times (2X^2 - X + 1)$)

$$\begin{aligned} P \circ Q &= Q^3 - Q^2 + 3Q - 1 \\ &= 8X^6 - 12X^5 + 14X^4 - 9X^3 + 10X^2 - 4X + 2. \\ \text{De même, } Q \circ P &= 2P^2 - P + 1 \\ &= 2X^6 - 4X^5 + 14X^3 - 17X^3 + 23X^2 - 15X + 4. \end{aligned}$$

Autocorrection B.

D'après le binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned} (X+1)^n &= X^n + nX^{n-1} + \cdots + 1 \\ (X-1)^n &= X^n - nX^{n-1} + \cdots + (-1)^n. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (X+1)^n - (X-1)^n &= 2nX^{n-1} + \cdots + 1 - (-1)^n \\ (X+1)^n + (X-1)^n &= 2X^n + \cdots + 1 + (-1)^n. \end{aligned}$$

Autocorrection C.

Le polynôme X^3 convient clairement. Montrons que c'est le seul.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, P(k) = k^3$. Le polynôme $P - X^3$ a donc tous les entiers naturels comme racines. D'après le critère radical de nullité, il est nul, ce qui montre que $P = X^3$.

Autocorrection D.

Par définition, le reste R recherché est l'unique élément $R \in \mathbb{K}_1[X]$ tel qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X-a)(X-b)Q + R. \qquad (*)$$

Comme $R \in K_1[X]$, on peut trouver $u, v \in K$ tel que $R = uX + v$.

En évaluant $(*)$ en a et en b, on obtient les équations

$$P(a) = (a-a)(a-b)Q(a) + R(a) = u\,a + v \qquad \text{et, de même,} \qquad P(b) = u\,b + v.$$

On a ainsi un système de deux équations à deux inconnues (u et v) :

$$\begin{cases} a\,u + v = P(a) \\ b\,u + v = P(b). \end{cases}$$

Procédons par analyse et synthèse.

Analyse. Soit (u, v) une solution du système.

- En faisant la différence des deux équations, il vient $(a-b)u = P(a) - P(b)$, d'où l'on tire $u = \dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}$ car a et b ont été supposés distincts.
- La première équation donne alors

$$v = P(a) - au = P(a) - a\frac{P(a)-P(b)}{a-b} = \frac{a\,P(b) - b\,P(a)}{a-b}.$$

Synthèse. Réciproquement, on vérifie directement que $(u,v) = \left(\dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}, \dfrac{a\,P(b)-b\,P(a)}{a-b}\right)$ est bien solution du système.

Notre système a donc une unique solution : $(u,v) = \left(\dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}, \dfrac{a\,P(b)-b\,P(a)}{a-b}\right)$.

Ainsi,

$$R = \frac{P(a)-P(b)}{a-b}X + \frac{a\,P(b)-b\,P(a)}{a-b}$$

(qui est bien l'expression de l'unique polynôme de degré $\leqslant 1$ valant $P(a)$ en a et $P(b)$ en b).

Autocorrection E.

En calculant les premières valeurs, on conjecture rapidement que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = k^n\,X^k.$$

On montre alors facilement cette propriété par récurrence.

Autocorrection F.

- Par combinaison linéaire, le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k$ appartient à $K_n[X]$ et vérifie, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$P(x_j) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x_j) = \sum_{k=0}^{n} \delta_{k,j} = 1.$$

  Les polynômes P et 1, éléments de $K_n[X]$, coïncident donc en $n+1$ points, donc $P = 1$.

- De même, $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k\,L_k$ appartient à $K_n[X]$ et vérifie, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$Q(x_j) = \sum_{k=0}^{n} x_k\,L_k(x_j) = \sum_{k=0}^{n} x_k\,\delta_{k,j} = x_j,$$

  donc Q et $X \in K_n[X]$ coïncident en $n+1$ points, et sont donc égaux.