Compléments sur les nombres réels

Exercice 1.

Dans chacun des cas, on peut commencer par le cas où les nombres réels en présence sont dans l'intervalle $[0,1[$ puis attaquer le cas général en utilisant abondamment la propriété

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor t+m \rfloor = \lfloor t \rfloor + m$$

pour se ramener au cas particulier.

Exercice 5.

Pour la deuxième question, une fois que l'on aura identifié une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ très proche de $(\lfloor \alpha^n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une certaine relation de récurrence d'ordre 2 à coefficients entiers, on pourra chercher à comprendre pourquoi il est beaucoup plus facile de calculer $[v_n]_{1000} \in \mathbb{Z}/1000\mathbb{Z}$ que v_n lui-même, pour de très grandes valeurs de n.

Exercice 11.

On pourra remarquer que l'ensemble de l'énoncé est un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 12.

Pour la dernière question, on pourra s'intéresser à l'ensemble $\{n\,\theta + m\,2\pi \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 14.

Pour la dernière question, on pourra prendre $x \in \,]1/2, 1[$ et construire une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $P_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} \in \left\{P_n, P_n + X^{n+1}\right\}$ vérifiant que la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ reste toujours négative mais qu'elle s'approche infiniment près de 0.

Il reste ensuite à passer de « x est presque une racine de P_n » à « x est très près d'une racine de P_n ».

Exercice 19.

Faire un dessin !

Exercice 29.

On peut considérer l'ensemble des $b \geqslant a$ tels que $[a, b]$ soit recouvert par une sous-famille finie de la famille d'intervalles $(I_j)_{j\in J}$.

Exercice 31.

On peut commencer par vérifier qu'il suffit de montrer que, pour tous $u < v$ appartenant à A, la partie $A \cap [u, v]$ (ou son intersection avec les irrationnels est dense dans $[u, v]$.

Autocorrection

Autocorrection A.

On va montrer que $|a| = 0$, par contraposée.

Supposons par l'absurde que $|a| > 0$. Montrons la négation de l'hypothèse, c'est-à-dire

$$\exists \varepsilon > 0 : |a| > \varepsilon.$$

Candidat : $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$.

- Comme $|a| > 0$, on a bien $\varepsilon > 0$.
- On obtient l'inégalité $\varepsilon < |a|$ en multipliant par $|a|$ (qui est > 0) l'inégalité $\dfrac{1}{2} < 1$.

Cela conclut la preuve.

Autocorrection B.

On distingue 2 cas.

- ▸ Supposons $a \in \mathbb{Z}$.
  La partie $[a, b] \cap \mathbb{Z} = [\![a, \lfloor b \rfloor]\!]$ a alors $\lfloor b \rfloor - a + 1$ éléments.
  Par ailleurs, dans ce cas, $1 - a \in \mathbb{Z}$, donc $\lfloor 1 - a \rfloor = 1 - a$, et on a bien
  $$\lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor = \lfloor b \rfloor + 1 - a.$$
- ▸ Supposons $a \notin \mathbb{Z}$.
  La partie $[a, b] \cap \mathbb{Z} = [\![\lfloor a \rfloor + 1, \lfloor b \rfloor]\!]$ a alors $\lfloor b \rfloor - (\lfloor a \rfloor + 1) + 1 = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$ éléments.
  Par ailleurs, dans ce cas, $\lfloor 1 - a \rfloor = - \lfloor a \rfloor$: en effet, on a, par définition de la partie entière, l'encadrement $\lfloor a \rfloor < a < \lfloor a \rfloor + 1$, donc $- \lfloor a \rfloor < 1 - a < 1 - \lfloor a \rfloor$. Ainsi, on a bien
  $$\lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor.$$

Autocorrection C.

1. Supposons $s - r \geqslant 1$ et montrons que l'entier $\lfloor s \rfloor$ appartient au segment $[r, s]$.
   - ▸ On a déjà $\lfloor s \rfloor \leqslant s$.
   - ▸ Par ailleurs, $\lfloor s \rfloor \geqslant s - 1 \geqslant r$.

   Cela conclut.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. On va montrer qu'il existe $x \in D_k$ tel que $|x - a| \leqslant \varepsilon$.
   Comme $\varepsilon > 0$ et $k > 1$, on peut trouver un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $k^m \varepsilon \geqslant 1$. En effet,
   - ▸ si $\varepsilon \geqslant 1$, $m = 0$ convient ;
   - ▸ si $\varepsilon < 1$, on a $\ln(1/\varepsilon) > 0$; on peut alors appliquer la propriété d'Archimède à $\ln(1/\varepsilon)$ et $\ln(k)$, tous deux > 0 : on trouve ainsi $m \in \mathbb{N}$ tel que
   $$m \ln(k) \geqslant \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \text{donc} \qquad k^m \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{(par croissance de exp)}$$
   $$\text{donc} \qquad k^m \varepsilon \geqslant 1.$$

   On a alors *a fortiori* $k^m 2\varepsilon \geqslant 1$, et la question précédente entraîne que l'on peut trouver un entier $n \in [k^m (a - \varepsilon), k^m (a + \varepsilon)]$, intervalle de taille $k^m 2\varepsilon$.
   On a alors $\dfrac{n}{k^m} \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, ce qui montre $\exists x \in D_k : |x - a| \leqslant \varepsilon$, et conclut.
3. On a par exemple $D_2 \subseteq \mathbb{Q}$ (ensemble des *nombres dyadiques*) ou $D_{10} \subseteq \mathbb{Q}$ (ensemble des nombres décimaux), donc la densité de ces ensembles entraîne celle de $\mathbb{Q}$.

Autocorrection D.
La partie B étant non vide et bornée, elle a une borne inférieure et une borne supérieure. Il en va de même de A.

En particulier, la borne inférieure (resp. supérieure) minorant (resp. majorant) la partie B, on a

$$\forall x \in B, \inf B \leqslant x \leqslant \sup B.$$

Puisque $A \subseteq B$, on a *a fortiori*

$$\forall x \in A, \inf B \leqslant x \leqslant \sup B.$$

On a donc montré que $\inf B$ minorait A. Comme $\inf A$ est le plus grand des minorants de A, on en déduit $\inf B \leqslant \inf A$.

De même, $\sup B$ majore A et $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, donc on a $\sup A \leqslant \sup B$.

Autocorrection E.
On notera à chaque fois A la partie de l'énoncé.

(i) On a clairement $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$, ce qui montre que A est minoré par 0 et majoré par 1.
Comme en outre $1 = \dfrac{1}{1} \in A$, on a déjà

$$\max A = \sup A = 1.$$

Par ailleurs, montrons que 0 est la borne inférieure de A. On a déjà dit que 0 minorait A.
Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer que ε ne minore pas A.
Par le caractère archimédien des réels, on peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, ce qui exhibe un élément de A qui est $< \varepsilon$ et montre que ε ne minore pas la partie A.
Le nombre 0 est donc le plus grand des minorants de A, ce qui montre $0 = \inf A$.
Comme $0 \notin A$, on a $\inf A \notin A$, ce qui montre que A n'a pas de minimum.

(ii) Comme à la question précédente, on voit clairement que 0 minore A et que 1 majore A.
Comme $1 \in A$, on a, comme au point précédent,

$$\max A = \sup A = 1.$$

Contrairement au point précédent, $0 \in A$, donc on a

$$\min A = \inf A = 0.$$

(iii) On a déjà vu que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$.
En passant à l'opposé, on a de même l'encadrement $\forall n \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_-^*, -1 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 0$.
En rassemblant ces deux encadrements, on a

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, -1 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1,$$

donc -1 minore A et 1 majore A.
Comme $-1 = \dfrac{1}{-1} \in A$ et $1 = \dfrac{1}{1} \in A$, on a

$$\min A = \inf A = -1 \quad \text{et} \quad \max A = \sup A = 1.$$

(iv) ▶ Montrons que $\inf\,]a, b[= a$. Comme $a \notin\,]a, b[$, on en déduira que $]a, b[$ n'a pas de minimum.

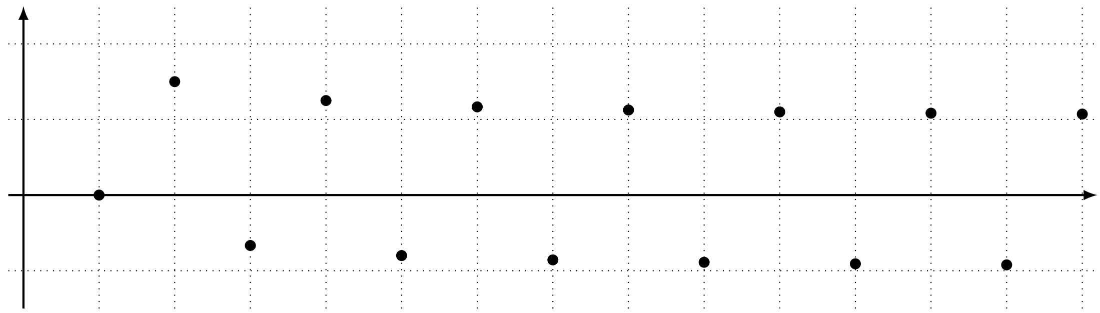
- Il est déjà clair que a minore $]a, b[$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $a + \varepsilon$ ne minore pas $]a, b[$.
  Quitte à réduire ε, on peut supposer $\varepsilon \leqslant b - a$. On a alors

$$a + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad a + \frac{\varepsilon}{2} \in]a, b[,$$

  ce qui conclut.

► On montre de même que $\sup]a, b[= b$, qui n'est pas un maximum.

(v) Un graphique peut aider à y voir plus clair.



On va montrer que

$$\max A = \sup A = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad \inf A = -1,$$

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*, (-1)^n + \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{3}{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On distingue deux cas.

- Si n est impair, on a $(-1)^n = -1$ et $\dfrac{1}{n} \leqslant 1$, donc

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant -1 + 1 = 0.$$

- Si n est pair, il est déjà $\geqslant 2$. On a donc $(-1)^n = 1$ et $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Comme $\dfrac{3}{2} = 1 + \dfrac{1}{2} \in A$, on a déjà montré

$$\max A = \sup A = \frac{3}{2}.$$

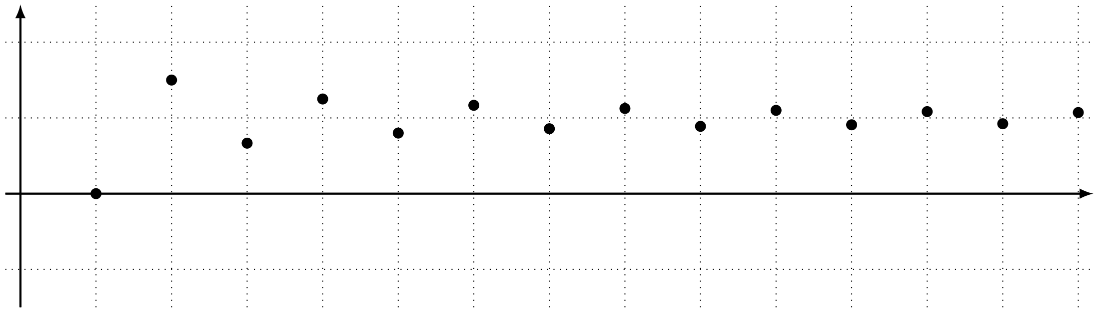
Par ailleurs, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} > 0$, donc $(-1)^n + \dfrac{1}{n} \geqslant -1 + \dfrac{1}{n} > -1$. Cela montre déjà que -1 minore A.
Pour montrer que $-1 = \inf A$, nous allons utiliser la caractérisation epsilonesque de la borne inférieure : il nous reste à montrer $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a \leqslant -1 + \varepsilon$.
D'après le caractère archimédien des réels, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.
Posons

$$m = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est impair} \\ n+1 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

L'entier m est alors impair quoi qu'il arrive, et, comme $m \geqslant n$, on a $\dfrac{1}{m} \leqslant \varepsilon$.

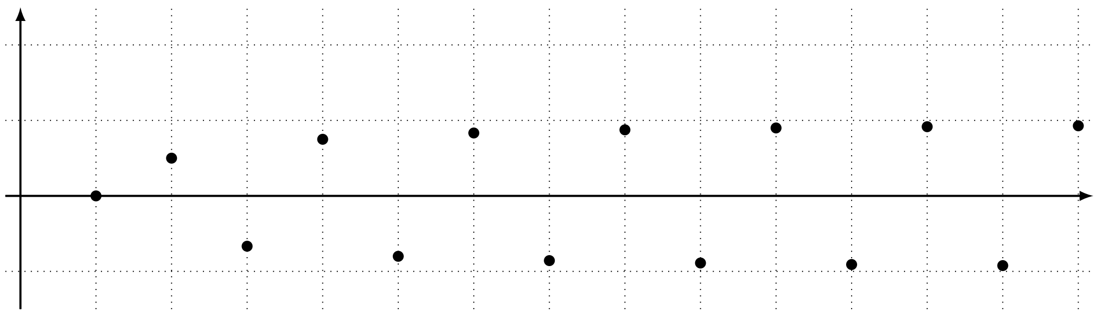
On a donc
$$(-1)^m + \frac{1}{m} = -1 + \frac{1}{m} \leqslant -1 + \varepsilon.$$
Comme $(-1)^m + \dfrac{1}{m} \in A$, cela conclut.

(vi)



- On a déjà $1 + \dfrac{(-1)^1}{1} = 0$ et $1 + \dfrac{(-1)^2}{2} = \dfrac{3}{2}$.
- Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 3$, on a $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{3}$, donc $\left|\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right) - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{3}$, donc
$$0 < \frac{2}{3} \leqslant 1 + \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{4}{3} < \frac{3}{2}.$$
- Cela montre :
  - que $0 \in A$ et que 0 minore A, donc $0 = \min A$;
  - que $\dfrac{3}{2} \in A$ et que $\dfrac{3}{2}$ majore A, donc $\dfrac{3}{2} = \max A$.

(vii)



- On a déjà, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\left|(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| = 1 - \frac{1}{n} < n,$$
ce qui montre $-1 < (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Montrons $\exists a \in A : a \geqslant 1 - \varepsilon$. Cela montrera $\sup A = 1$, et donc que A n'a pas de maximum (car, d'après ce qui précède, sa borne supérieure, 1, majore **strictement** A).
D'après le caractère archimédien des réels, on peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$. Quitte à ajouter 1 à n (ce qui ne changera pas l'inégalité précédente), on peut supposer n pair.
On a alors $\dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$, donc $(-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1 - \dfrac{1}{n} \geqslant 1 - \varepsilon$, ce qui conclut.
- On montre exactement de la même façon que $-1 = \inf A$, et donc que A ne possède pas de minimum.