Compléments sur les nombres réels

Autocorrection A.

Soit a un réel tel que $\forall \varepsilon > 0, |a| \leqslant \varepsilon$. Que peut-on dire de a ?

Partie entière

Autocorrection B.

Soit $a \leqslant b$ deux réels. Montrer que $\Big|[a, b] \cap \mathbb{Z}\Big| = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor$.

Exercice 1.

Soit x et y deux réels. Montrer les assertions suivantes.

(i) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

(iii) $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1/2 \rfloor$.

Exercice 2$^+$.

Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \dfrac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice 3.

Étudier la périodicité des fonctions réelles $x \mapsto \lfloor 3x \rfloor - 3x$ et $x \mapsto \dfrac{x}{2} - \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor$. Dessiner leurs graphes.

Exercice 4.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x.

Résoudre le système d'équations $\begin{cases} x + \lfloor y \rfloor + \{z\} = 1{,}1 \\ \lfloor x \rfloor + \{y\} + z = 2{,}2 \\ \{x\} + y + \lfloor z \rfloor = 3{,}3. \end{cases}$

Exercice 5$^+$ (Nombres de Pisot-Vijayaraghavan).

1. Soit $\alpha = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$.
   (a) En se rappelant le théorème concernant ces suites, montrer que la suite $(\lfloor \alpha^n \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie, à partir d'un certain rang, une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients entiers.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor \alpha^n \rfloor$ est de même parité que n.
2. Soit $\beta = 3 + \sqrt{5}$. Écrire un algorithme permettant de calculer rapidement les trois derniers chiffres avant la virgule de β^n, pour de très grandes valeurs de n. (Pour fixer les idées, disons que les calculs devraient par exemple rester faisables avec un ordinateur pour $n \approx 10^{1\,000\,000}$).
3. Après avoir identifié la propriété des réels α et β utilisée dans les deux exercices précédents, en inventer un analogue, mettant en jeu un troisième nombre réel γ bien choisi.

Exercice 6^{++}. *Putnam*

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor$.

Densité

Autocorrection C. ☑

Soit $k > 1$ un réel. On note
$$D_k = \left\{ \frac{n}{k^m} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \text{ et } m \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Montrer que si $r < s$ sont deux réels tels que $s - r > 1$, alors le segment $[r, s]$ contient un entier.
2. En déduire que D_k est dense.
3. Comment le résultat précédent permet-il de redémontrer la densité de $\mathbb{Q}$?

Exercice 7$^+$.

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. Montrer que $\{\cos(\ln n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 8$^+$.

Montrer que $\left\{\sqrt{n} - \sqrt{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}$ est dense.

Exercice 9.

Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux parties denses.

1. Montrer que $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ est dense.
2. Montrer que $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ est dense.

Exercice 10.

Soit H un sous-groupe strict de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{R} \setminus H$ est dense.

Exercice 11$^+$.

Montrer que $\left\{ 2^a 3^b \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12$^+$.

On dira qu'une partie $A \subseteq \mathbb{U}$ est *dense dans* $\mathbb{U}$ s'il existe $\widetilde{A} \subseteq [0, 2\pi]$, dense dans $[0, 2\pi]$, et telle que $A = \left\{ \exp(i\,\alpha) \,\middle|\, \alpha \in \widetilde{A} \right\}$.

1. Montrer que si A est une partie dense dans $\mathbb{U}$, alors $\text{Ré}[A]$ et $\text{Im}[A]$ sont denses dans $[-1, 1]$.
   La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left\{ e^{i\,n\,\theta} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$ est dense dans $\mathbb{U}$ si et seulement si $\dfrac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 13^{++}.

On dit qu'une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est *dense à l'infini* si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0, \forall t \geqslant T, A \cap [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \neq \varnothing.$$

Soit $M \subseteq \mathbb{R}_+$ un sous-monoïde de $(\mathbb{R}_+, +)$.

Montrer que soit M est dense à l'infini, soit il existe $a \geqslant 0$ tel que $M \subseteq a\mathbb{N}$.

Exercice 14^{+++}. X

Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines réelles non nulles des polynômes de E.

1. Montrer que A est stable sous les applications $x \mapsto -x$ et $x \mapsto 1/x$.
2. Montrer que $A \subseteq [-2, 2]$.
3. Montrer que A est dense dans $[-2, -1/2] \cup [1/2, 2]$.

Bornes supérieure et inférieure

Autocorrection D.

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subseteq B$. On suppose que B est bornée. Montrer que A est bornée et comparer les bornes supérieures et inférieures de A et de B.

Autocorrection E.

Déterminer, si elles existent, les bornes des ensembles suivants et préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

(i) $\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$;

(ii) $\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\}$;

(iii) $\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$;

(iv) $]a, b[$, pour deux réels $a < b$;

(v) $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$;

(vi) $\left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$;

(vii) $\left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 15.

Déterminer, si elles existent, les bornes des ensembles suivants et préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

(i) $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$;

Exercice 16.

On pose $E = \left\{ \left| \frac{\cos(n)}{n} \right| \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer $\inf E$ et $\sup E$.

(On pourra admettre $\cos(1) > 1/2$).

Exercice 17.

Soit $E = \left\{ 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que E est borné et déterminer ses bornes.

Exercice 18.

Soit $E = \left\{ \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
2. Déterminer $\inf E$ et $\sup E$.
3. Montrer que E est dense dans $[0, 1]$.

Exercice 19.

Soit $a_1 < \cdots < a_n$ des réels. Déterminer $\inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x - a_i| \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 20.

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

1. On suppose $\sup A > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.
2. On suppose $\sup A \geqslant 0$. Existe-t-il un élément de A positif ?

Exercice 21.

Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les ensembles suivants :

$$-A = \{-x \mid x \in A\}, \qquad \lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\},$$
$$A + B = \{x + y \mid (x, y) \in A \times B\}, \qquad A + \lambda = \{x + \lambda \mid x \in A\}.$$

1. Montrer que $A \cup B$ est majoré et que l'on a $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
2. On suppose que A et B ne sont pas disjoints. Montrer que $A \cap B$ est majoré et que l'on a l'inégalité $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup(A), \sup(B))$. Donner un exemple où cette inégalité est stricte.
3. Montrer que $-A$ est minoré et que l'on a $\inf(-A) = -\sup(A)$.
4. Montrer que $A + \lambda$ est majoré et que l'on a $\sup(A + \lambda) = \sup(A) + \lambda$.
5. Montrer que $A + B$ est majoré et que l'on a $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
6. Si $\lambda > 0$, montrer que λA est majoré et que l'on a $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$. Que peut-on dire si $\lambda < 0$ ou $\lambda = 0$?

Exercice 22.

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.

On note m la borne inférieure de A et on pose $B = A \cap]-\infty, m + 1]$. Déterminer $\inf B$.

Exercice 23.

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1. On suppose $\forall x \in A, \forall y \in B, x \leqslant y$. Montrer que A est majorée, que B est minorée et que l'on a $\sup A \leqslant \inf B$. Peut-on avoir égalité ?
2. Mêmes questions si l'on suppose $\forall x \in A, \forall y \in B, x < y$.
3. Mêmes questions si l'on suppose $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in A, \forall y \in B, y - x \geqslant \varepsilon$.

Exercice 24 (Norme uniforme).

On note E l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées.

Pour tout $f \in \mathbb{E}$, on note $\|f\|_\infty$, et on appelle *norme uniforme* (ou *norme infinie*) la borne supérieure

$$\|f\|_\infty = \sup\left\{|f(t)| \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

1. Soit $f \in E$. Justifier que $\|f\|_\infty$ est bien définie.
2. Soit $f \in E$. Montrer l'équivalence $f = 0 \Leftrightarrow \|f\|_\infty = 0$.
3. (a) Montrer $\forall f \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda f\|_\infty \leqslant |\lambda| \; \|f\|_\infty$.
   (b) En utilisant habilement la question précédente, montrer $\forall f \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \; \|f\|_\infty$.
4. Soit $f, g \in E$. Montrer $f + g \in E$ et $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
5. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2}$ appartient à E et calculer sa norme uniforme.
6. Montrer que arctan appartient à E et calculer sa norme uniforme.

Exercice 25.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie non vide bornée.

1. Montrer que la borne supérieure $\sup\left\{|x - y| \,\middle|\, (x, y) \in A^2\right\}$ est bien définie. On l'appelle *diamètre* de A, et on la note $\mathrm{diam}(A)$.
2. Montrer que $\mathrm{diam}\, A = \sup A - \inf A$.

Exercice 26.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On appelle *distance* de x à A le réel

$$d(x, A) = \inf\{|x - a| \mid a \in A\}.$$

1. Justifier que $d(x, A)$ est bien définie.
2. Montrer
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |d(x, A) - d(y, A)| \leqslant |x - y|.$$
3. Montrer que $\overline{A} = \{x \in A \mid d(x, A) = 0\}$.

Exercice 27 (Théorème du point fixe pour les fonctions croissantes).

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction croissante. On veut montrer que f possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$. On pose $E = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leqslant x\}$.

1. Montrer que E possède une borne inférieure m.
2. Montrer que $f(m)$ minore E.
3. Montrer $f[E] \subseteq E$.
4. En déduire que m est un point fixe de f.

Ce résultat est-il toujours vrai si l'on remplace $[0, 1]$ par $[0, 1[$?

Exercice 28.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction majorée. Construire « la plus petite » fonction croissante $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \leqslant \varphi$ (en expliquant en quel sens elle est la plus petite).

Exercice 29^{++} (Théorème de recouvrement de Borel).

Soit $(I_j)_{j\in J}$ une famille d'intervalles ouverts tels que $[0, 1] \subseteq \bigcup_{j\in J} I_j$.

Montrer qu'il existe $J_0 \subseteq J$ fini tel que $[0, 1] \subseteq \bigcup_{j\in J_0} I_j$.

Exercice 30^{++} (Lemme de Cousin).

Soit $\delta : [0, 1] \to \mathbb{R}_+^*$ une application. Montrer qu'il existe une *subdivision pointée δ-fine*, c'est-à-dire deux familles $(x_i)_{i=0}^n$ et $(z_i)_{i=1}^n$ d'éléments de $[0, 1]$ telles que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], (z_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ et } 0 < x_i - x_{i-1} \leqslant \delta(z_i)).$$

Exercice 31^{++}. *ÉNS*

Soit $A \subseteq \mathbb{R}_+^*$ une partie bornée possédant au moins deux points et vérifiant

$$\forall a, b \in A, \sqrt{ab} \in A.$$

1. Montrer que A est dense dans $[\inf A, \sup A]$.
2. Montrer que $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est encore dense dans $[\inf A, \sup A]$.