Suites

Généralités

Autocorrection A.

Exprimer en fonction de n le terme général des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou $(u_n)_{n>0}$ suivantes.

(i) $u_1 = 7$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_{k+1} = -2u_k$;

(ii) $u_1 = 3$ et $\forall n \geqslant 2,\ 2u_n = u_{n-1}$;

(iii) $u_0 = 10$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ u_{p+1} - u_p = 3$;

(iv) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{3} + 4$;

(v) $u_0 = 0$ et $\forall i \geqslant 0,\ 4u_{i+1} + 1 = u_i$;

(vi) $u_0 = 2, u_1 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = 0$;

(vii) $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0$;

(viii) $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ u_{m+1} = u_m + 3u_{m-1}$;

(ix) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{-1}{2}u_n^2$;

(x) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_{n-1} + n$;

(xi) $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$;

(xii) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n^2$.

Exercice 1.

Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou $(u_n)_{n>0}$ définie par les expressions suivantes.

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dbinom{n}{p}$ (pour un certain $p \in \mathbb{N}$) ;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$;

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n!}{2^n}$;

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k - n \ln n$;

(v) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$;

(vi) $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3u_n^2}{1 + 4u_n}$.

Exercice 2$^+$.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle non bornée et $C > 0$. Montrer que $\exists p, q \in \mathbb{N} : |u_p - u_q| > C$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles non bornées et $C > 0$. Montrer que
$$\exists p, q \in \mathbb{N} : |u_p - u_q| > C \text{ et } |v_p - v_q| > C.$$
3. Montrer que le résultat correspondant pour trois suites est faux.

Convergence

Calculs et opérations

Autocorrection B.

Étudier la convergence des suites $(u_n)_n$ dont les termes généraux sont les suivants.

(i) $\dfrac{\cos n}{n+1}$;

(ii) $\dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$;

(iii) $\dfrac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2}$;

(iv) $\dfrac{e^n+n^2}{n^4+1}$;

(v) $\dfrac{\ln n+1}{n+4}$;

(vi) $\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^n-(-2)^n}$;

(vii) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$;

(viii) $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$;

(ix) $\dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$;

(x) $\dfrac{n!}{n^n}$.

Autocorrection C.

1. Peut-on déterminer la nature (convergente ou divergente) de la somme de deux suites si l'on connaît la nature des deux suites ?

   On traitera tous les cas, en fournissant suivant les cas une preuve ou un contre-exemple.
2. Même question pour le produit.

Autocorrection D.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes.

Montrer que $\big(\min(u_n, v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\max(u_n, v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 3.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} \cos(2\pi n! x)^{2m}$?

Exercice 4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Que peut-on dire de la suite $(\lfloor u_n\rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 5.

Soit $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Construire deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 1 et $+\infty$, respectivement, telles que $u_n^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Exercice 6.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer qu'il existe une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Autres théorèmes de convergence

Exercice 7 (Définition de $\zeta(2)$).

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Étudier la monotonie de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
3. En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 8.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $T_{n+1} = \frac{T_n + S_n}{3}$.
3. En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 9.

Montrer que la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 10.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la nature de la suite $\left(\frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+p)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11.

Étudier la convergence des trois suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ dont les termes généraux sont les suivants.

(i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$; (ii) $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$; (iii) $\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k!$.

Exercice 12.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0, 1]$ telles que $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Qu'en dire ?

Exercice 13$^+$ (Irrationalité de e).

On définit les suites

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \qquad \text{et} \qquad (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(u_n + \frac{1}{n\,n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

1. Montrer qu'il s'agit de deux suites adjacentes.
2. On admet que la limite de ces deux suites est e. En déduire que e est irrationnel.

Exercice 14.

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies ci-dessous par leurs termes généraux sont adjacentes.

(i) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$;

(ii) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$

Exercice 15 (Critère spécial des séries alternées).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Montrer que $\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 16$^+$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si $(u_n)_n$ est monotone et que $(C_n)_n$ converge, alors $(u_n)_n$ converge.
3. Montrer que si $(u_n)_n$ est bornée, alors $(C_n)_n$ est bornée. La réciproque est-elle vraie ?
4. Montrer que si $(u_n)_n$ est croissante, alors $(C_n)_n$ est croissante. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 17.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\, u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 18.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs strictement positives.

1. Montrer que s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \binom{2n}{n}^{1/n}$.

Exercice 19$^+$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k v_{n+1-k}.$$

Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le produit des limites.

Mélange

Exercice 20.

Montrer que toute suite d'entiers naturels convergente est stationnaire.

Exercice 21 (Critère de D'Alembert).

Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs strictement positives et $\ell \in \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Montrer que l'on ne peut rien dire si $\ell = 1$.

Exercice 22.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leqslant \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$. Montrer qu'elle converge.

Exercice 23$^+$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $E = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. On suppose $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Montrer que E admet un minimum.
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que E admet un extremum.

Exercice 24$^+$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels deux à deux distincts. Montrer $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 25$^+$ (Lemme sous-additif de Fekete).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite positive *sous-additive*, c'est-à-dire telle que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, u_{n+m} \leqslant u_n + u_m.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geqslant N, \dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{u_n}{n} + \delta$.
2. Montrer que
$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf\left\{\frac{u_k}{k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Suites extraites et valeurs d'adhérence

Autocorrection E.

Montrer que toute suite périodique non constante diverge.

Exercice 26.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente telle que $\big((-1)^n u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également. Que peut-on dire ?

Exercice 27.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 28.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et admet une suite extraite convergente. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et admet une suite extraite majorée. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 29$^+$.

Sout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $k \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. On suppose que $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Peut-on en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

Exercice 30$^+$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle.

Exercice 31$^+$.

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ deux suites d'entiers telles que $\dfrac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \notin \mathbb{Q}$. Montrer que

$$|p_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad |q_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Exercice 32^{++}.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer qu'il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $u_{\varphi(n)} - n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 33 (Théorème de Bolzano-Weierstrass par le lemme des pics).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit $E = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \forall k > n, u_k < u_n\}$.

1. Montrer que si E est infini, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite décroissante.
2. Montrer que si E est fini, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite croissante.
3. Déduire de ce qui précède une preuve du *théorème de Bolzano-Weierstrass* : toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Exercice 34$^+$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, peut-on en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

Exercice 35$^+$. *Lyon*

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $a_n + b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $e^{a_n} + e^{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

   Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
2. La même conclusion tient-elle pour trois suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a_n + b_n + c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$?

Exercice 36$^+$. *X*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que $u_n + \dfrac{1}{2}u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 37^{+++}. *ÉNS*

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $]0,1[$. Montrer que
$$\big(x_n(1-x_{n+1})\big)_{n\in\mathbb{N}}$$
admet une valeur d'adhérence $\leqslant \dfrac{1}{4}$.
2. On suppose que $\big(x_n(1-x_{n+1})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de valeur d'adhérence $< \dfrac{1}{4}$.

   Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

Exercice 38.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée et $\ell = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.

1. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer que $\{n\in\mathbb{N} \,|\, u_n \geqslant \ell+\varepsilon\}$ est fini.
   (b) Montrer que $\{n\in\mathbb{N} \,|\, u_n \geqslant \ell-\varepsilon\}$ est infini.
2. Que dire de $\{n\in\mathbb{N} \,|\, u_n \geqslant \ell\}$?

Exercice 39.

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers, rangés par ordre croissant ($p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, etc.).

1. Identifier une conjecture célèbre, qui se reformule en une égalité portant sur $\liminf\limits_{n\to+\infty}(p_{n+1}-p_n)$.
2. Que vaut $\limsup\limits_{n\to+\infty}(p_{n+1}-p_n)$?

Exercice 40 (Complétude de $\mathbb{R}$).

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *de Cauchy* si
$$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} : \forall p,q \geqslant N, |u_p-u_q| \leqslant \varepsilon.$$

1. Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (b) Montrer que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Suites et densité

Exercice 41^{+}.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ une bijection. Déterminer les valeurs d'adhérence de $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 42^{+}.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

On note $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

Montrer que l'ensemble $\left\{ \displaystyle\sum_{n\in I} u_n \;\middle|\; I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 43⁺.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites tendant vers $+\infty$ telles que

$$u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1}-v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Montrer que $\left\{u_n-v_m \,\middle|\, (n,m)\in\mathbb{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Suites à valeurs complexes

Exercice 44.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $z_{n+1}=3z_n-\bar{z}_n$. Déterminer une expression explicite du terme général z_n.

Exercice 45.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant

$$\forall n\in\mathbb{N}, z_n=\frac{1}{4}z_n+\frac{3}{4}\overline{z_n}.$$

Étudier la convergence de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer le cas échéant sa limite.

Exercice 46.

Soit $\theta\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}=(\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Exercice 47⁺.

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$.

Déterminer si la suite $\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et, le cas échéant, déterminer sa limite.

Études de suites récurrentes et implicites

Suites récurrentes

Autocorrection F.

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n+e^{-u_n}$.

Autocorrection G.

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=-\frac{1}{2}$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n+u_n^2$.

Exercice 48.

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\frac{u_n^2+u_n}{2}$.

Exercice 49 (Méthode de Hénon).

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

1. Étudier la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right) \end{cases}$. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{a}$, on a $f(x) \leqslant x$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \sqrt{a}$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 50. ☑

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e\ln(u_n)$.

1. Étudier la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0 \geqslant e$.
2. Que dire si $u_0 < e$?

Exercice 51. ☑

Soit $f : \begin{cases}]-\infty, 2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{2-x} \end{cases}$.

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]-\infty, 2]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?
2. On suppose que u_0 a une telle valeur.
   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 52.

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

Exercice 53. ☑

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \dfrac{1+a_n}{2} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Quelles sont les valeurs d'adhérence de cette suite ?

Couples de suites

Exercice 54 (Moyenne arithmético-géométrique). ☑

Soit $a > b \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$. Montrer que ces deux suites sont bien définies et qu'elles sont adjacentes.

(La limite commune de ces deux suites est, par définition, la *moyenne arithmético-géométrique* des deux nombres a et b.)

Exercice 55.

Soit $x > 1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = x$, $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies, qu'elles sont adjacentes et calculer leur limite commune.

Suites implicites

Exercice 56.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On la note x_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1/2 \leqslant x_n \leqslant 1$.
3. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
4. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 57.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto x^5 + nx - 1. \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est décroissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, puis que sa limite est 0.

Exercice 58.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln x = n$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ que nous noterons u_n.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et déterminer sa limite.