
Limites, continuité

Exercice 5.

Pour la croissance, on pourra considérer deux points $x_0 < x_1$ dans $]a, b[$ et montrer l'encadrement $f(x_0^+) \leq f(x_1) \leq f(x_1^+)$.

Exercice 8.

Quelles sont les valeurs prises par la fonction $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor^{-1}$?

Exercice 10.

Pour la deuxième question, on pourra chercher un exemple de la forme $\mathbb{1}_A$ pour un choix judicieux de partie $A \subseteq \mathbb{R}$.

Exercice 11.

On pourra s'inspirer de la preuve du théorème de Cesàro.

Exercice 13.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Le théorème de la limite monotone montre déjà l'inégalité $f(x_0^-) \leq f(x_0^+)$. Il s'agit donc d'utiliser l'autre hypothèse pour démontrer l'inégalité réciproque.

Exercice 21.

Pour la première question, il est facile de montrer que, quel que soit $x \in I$, $f(x) = \pm g(x)$. La difficulté est de montrer que le signe remplaçant le \pm ne dépend pas de x .

Exercice 48.

On pourra d'abord montrer le résultat en restriction à \mathbb{N} , puis à \mathbb{Z} , puis à \mathbb{Q} .

Exercice 50.

On pourra commencer par montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$.

Exercice 55.

Le théorème des valeurs intermédiaires montre que dans tous les cas, $f[I]$ est un intervalle. Pour savoir quels types d'intervalles sont possibles, il est bon de tracer approximativement des graphes possibles avant de chercher à donner des formules.

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) 0 ;

(ii) la fonction n'a pas de limite (on peut trouver deux suites $(\xi_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\xi_n^\pm \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et $\cos\left((\xi_n^\pm)^2\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \pm 1$);

- (iii) 1 (penser à la quantité conjuguée);
- (iv) $+\infty$;
- (v) 0;
- (vi) 1;
- (vii) 1;
- (viii) e ;
- (ix) 1;
- (x) $\frac{1}{2}$ (penser à la quantité conjuguée);
- (xi) 1;
- (xii) $+\infty$;
- (xiii) la fonction n'a pas de limite, mais elle converge vers $\frac{\sqrt{3}}{3}$ à droite et $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ à gauche (on peut factoriser : $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$ et $2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$);
- (xiv) e (on peut par exemple utiliser la question (viii) et $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$);
- (xv) $1 + \sqrt{2}$ (penser à la quantité conjuguée);
- (xvi) $-\frac{1}{2}$.
- (xvii) $\frac{1}{2}$ (on peut utiliser la factorisation $x - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$);
- (xviii) 1 (on peut factoriser par x puis utiliser la quantité conjuguée);
- (xix) On va utiliser à plusieurs reprises la limite du taux d'accroissement

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln'(1) = 1.$$

On écrit alors, pour $x > 1$,

$$\begin{aligned} \ln(x) \times \ln(\ln x) &= \frac{\ln(x)}{x-1} \times (x-1) \times \ln\left(\frac{\ln x}{x-1} \times (x-1)\right) \\ &= \frac{\ln(x)}{x-1} \times (x-1) \left(\ln\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) + \ln(x-1)\right) \\ &= \frac{\ln(x)}{x-1} \times (x-1) \times \ln\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) + \frac{\ln(x)}{x-1} \times (x-1) \times \ln(x-1). \end{aligned}$$

En plus de la limite déjà mentionnée, et qui implique en particulier $\ln\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$, on utilise les croissances comparées pour obtenir $(x-1) \ln(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$.

Par opérations, on obtient que la limite est 0.

- (xx) On a la limite du taux d'accroissement

$$\frac{1 - \cos t}{t} = -\frac{\cos t - \cos 0}{t - 0} \xrightarrow{t \rightarrow 0} -\cos'(0) = 0.$$

Comme en outre $\arccos x \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ on a par composition

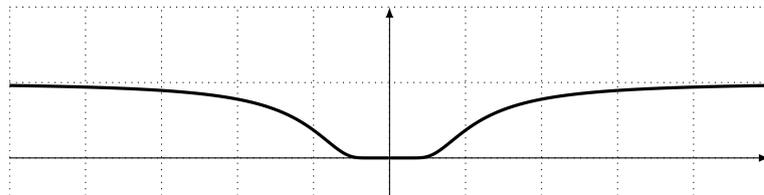
$$\frac{1 - x}{\arccos x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0.$$

Autocorrection B.

(i) La formule définit une application $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, continue par opérations.

On a $-\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$, donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$: la fonction admet le prolongement continu

$$\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$



(ii) La formule définit une application $f : \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, continue par opérations.

On a $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par croissance comparée, donc

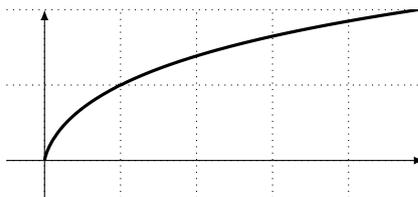
$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Par ailleurs, on a la limite du taux d'accroissement $\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln'(1) = 1$, ce qui implique

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1.$$

Ainsi, la fonction admet le prolongement continu

$$\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin \{0, 1\} \\ 0 & \text{si } x = 0; \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases} \end{cases}$$



(iii) La formule définit une application

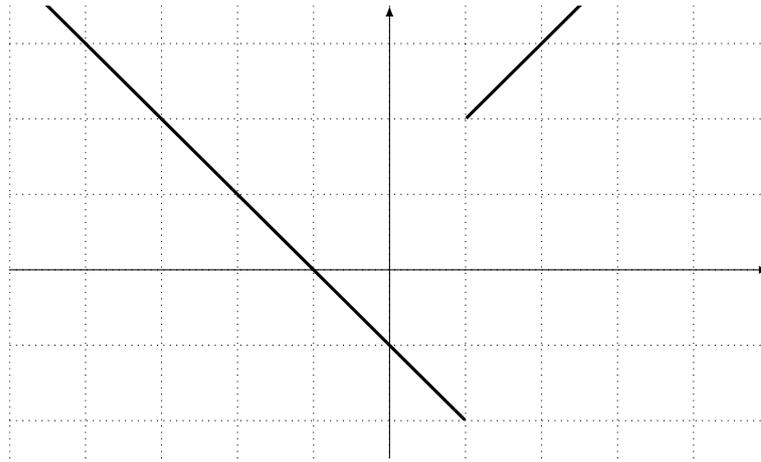
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \frac{x - 1}{|x - 1|} (x + 1) = (x + 1) \times \text{signe}(x - 1), \end{cases}$$

continue par opérations.

On a

$$f(x) \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} -2 \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[x > 1]{x \rightarrow 1} 2,$$

donc f n'a pas de limite en 2, et f n'a donc pas de prolongement continu en 1.



(iv) La formule définit une application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(x^2 - 1)^2}{|x - 1|} = |x - 1| \times (x + 1)^2, \end{cases}$$

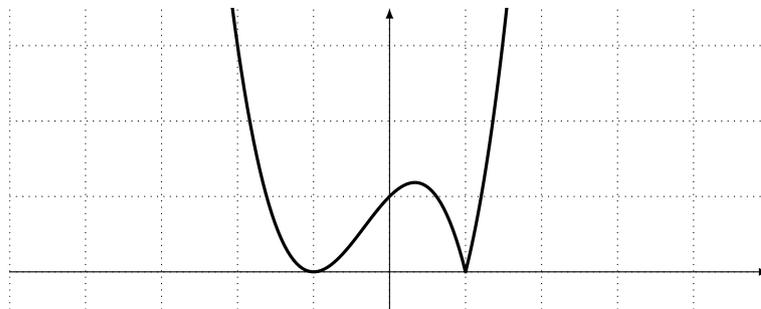
continue par opérations.

On a

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0,$$

donc f admet le prolongement continu

$$\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$



(v) La formule définit une application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right), \end{cases}$$

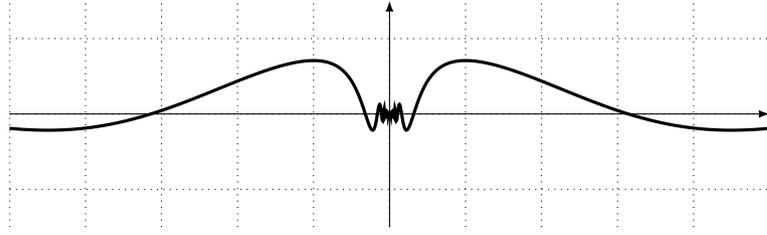
continue par opérations.

On a

$$\forall x, |f(x)| \leq \underbrace{|\sin x|}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0},$$

donc le théorème des gendarmes entraîne que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, ce qui entraîne que f admet le prolongement continu

$$\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{cases}$$



(vi) La formule définit une application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x \times \cos\left(\frac{1}{x}\right), \end{cases}$$

continue par opérations.

Considérons deux suites $(\xi_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \xi_n^- = \frac{1}{(2n+1)\pi} \quad \text{et} \quad \xi_n^+ = \frac{1}{(2n)\pi}.$$

Ces suites sont à valeurs dans \mathbb{R}^* , et convergent vers 0. Par continuité, cela entraîne que

$$\cos(\xi_n^-) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \cos(\xi_n^+) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.$$

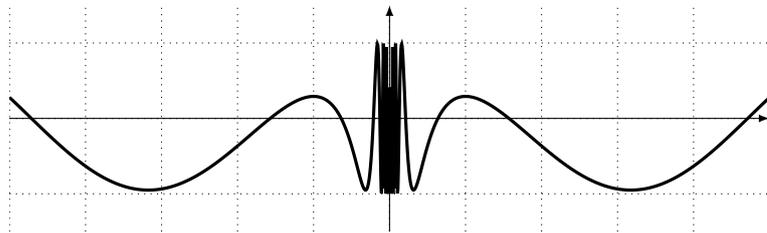
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos\left(\frac{1}{\xi_n^-}\right) = -1$, donc

$$f(\xi_n^-) = \cos(\xi_n^-) \times \cos\left(\frac{1}{\xi_n^-}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1.$$

De même, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos\left(\frac{1}{\xi_n^+}\right) = 1$, donc

$$f(\xi_n^+) = \cos(\xi_n^+) \times \cos\left(\frac{1}{\xi_n^+}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.$$

Cela démontre que f n'a pas de limite en 0. En particulier, f n'est pas prolongeable par continuité en 0.



Autocorrection C.

Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x - \pi^2 \ln(x^2 + 1). \end{cases}$$

C'est une fonction continue, par opérations.

On a $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = e - \pi^2 \ln(2) < 0$, et les limites

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} -\infty \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty \quad (\text{par croissance comparée}).$$

- ▶ D'après le théorème des valeurs intermédiaires (généralisé), la fonction f s'annule en un point $x_0 \in]-\infty, 0]$, nécessairement $x_0 < 0$ (car $f(0) \neq 0$).
- ▶ D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f s'annule en un point $x_1 \in [0, 1]$, nécessairement $0 < x_1 < 1$.
- ▶ D'après le théorème des valeurs intermédiaires (généralisé), la fonction f s'annule en un point $x_2 \in]1, +\infty]$, nécessairement $x_2 > 1$ (car $f(1) \neq 0$).

