Fonctions convexes

Exercice 4.

On pourra se rappeler (voire redémontrer) qu'une fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si

$$\forall a < b < c \in \mathbb{R}_+^*, (c-a)f(b) \leqslant (c-b)f(a) + (b-a)f(c).$$

Exercice 6.

On pourra commencer par montrer la définition de la convexité avec $\lambda \in [0,1]$ dyadique (c'est-à-dire un rationnel dont le dénominateur est une puissance de 2).

Exercice 16.

On pourra, après justification se ramener au cas où $x \leqslant y \leqslant \dfrac{x+z}{2} \leqslant z$.

Exercice 19.

2. Dans le sens difficile, remarquer que la fonction $\dfrac{f^\alpha - 1}{\alpha}$ est convexe.
3. Dans le sens difficile, obtenir une inégalité de la forme $f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leqslant (1-\lambda)u_\beta + \lambda v_\beta$, puis régler β de telle sorte que $u_\beta = v_\beta$ (c'est une manière usuelle, dans ce genre de cas, de transformer une expression additive en une expression multiplicative).

Autocorrection

Autocorrection A.

1. Soit $a, b \in I$ et $\lambda \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned} & f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) && \text{(f convexe)} \\ \text{donc} \quad & g\Big(f\big((1-\lambda)a+\lambda b\big)\Big) \leqslant g\big((1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)\big) && \text{(g croissante)} \\ & \leqslant (1-\lambda)g\big(f(a)\big) + \lambda g\big(f(b)\big), && \text{(g convexe)} \end{aligned}$$

ce qui montre que $g \circ f$ est convexe.

2. Avec les mêmes notations, on montre de même que :
   - si f est convexe et g est concave et décroissante, alors $g \circ f$ est concave ;
   - si f est concave et g est concave et croissante, alors $g \circ f$ est concave ;
   - si f est concave et f est convexe et décroissante, alors $g \circ f$ est convexe.
3. Considérons $f = \exp$ et $g : x \mapsto -x$ (affine donc convexe). La composée $g \circ f = -\exp$ n'est pas convexe (sa dérivée seconde est strictement négative).

Autocorrection B.

Comme I est un intervalle ouvert, f est continue. Bijection continue entre deux intervalles, elle est donc strictement monotone.

Soit maintenant $y_1, y_2 \in J$ et $\lambda \in [0,1]$. On a

$$f\big((1-\lambda)f^{-1}(y_1) + \lambda f^{-1}(y_2)\big) \leqslant (1-\lambda)f^{-1}\big(f(y_1)\big) + \lambda f^{-1}\big(f(y_2)\big) = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2.$$

- Si f est croissante, f^{-1} l'est également et l'on obtient :

  $$(1-\lambda)f^{-1}(y_1) + \lambda f^{-1}(y_2) \leqslant f^{-1}\big((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2\big),$$

  ce qui montre que f^{-1} est concave.
- Si f est décroissante, f^{-1} l'est également et l'on obtient :

  $$(1-\lambda)f^{-1}(y_1) + \lambda f^{-1}(y_2) \geqslant f^{-1}\big((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2\big),$$

  ce qui montre que f^{-1} est convexe.

Autocorrection C.

Soit $x_1 \leqslant x_2 \in \mathbb{R}_+$. Comme $a - x_2 \leqslant a - x_1 \leqslant a + x_2$, on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$a - x_1 = (1-\lambda)(a - x_2) + \lambda(a + x_2).$$

On en déduit l'expression pour $a + x_1$, en utilisant le fait que a est à la fois le milieu des segments $[a - x_1, a + x_1]$ et $[a - x_2, a + x_2]$:

$$\begin{aligned} \frac{(a-x_1)+(a+x_1)}{2} &= \frac{(a-x_1)+(a+x_1)}{2} \\ \text{donc} \qquad a + x_1 &= (a-x_2) + (a+x_2) - (a-x_1) \\ &= \lambda(a-x_2) + (1-\lambda)(a+x_2). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} g(x_1) &= f(a-x_1) + f(a+x_1) \\ &= f\big((1-\lambda)(a-x_2) + \lambda(a+x_2)\big) + f\big(\lambda(a-x_2) + (1-\lambda)(a+x_2)\big) \\ &\leqslant (1-\lambda)f(a-x_2) + \lambda f(a+x_2) + \lambda f(a-x_2) + (1-\lambda)f(a+x_2) \\ &\leqslant f(a-x_2) + f(a+x_2) \\ &\leqslant g(x_2). \end{aligned}$$

Autocorrection D.

En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique (avec des poids tous égaux) à $\dfrac{1}{x_1}, \dots, \dfrac{1}{x_n} \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1/x_1 + \cdots + 1/x_n}{n} \geqslant \left(\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant (x_1 \cdots x_n)^{1/n}.$$

Autocorrection E.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n. \end{cases}$ Cette fonction est lisse, et $f'' : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n \leqslant 1 \\ n(n-1)\,x^{n-2} & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$ est positive.

La fonction f est donc convexe.

Soit maintenant $x, y \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\frac{(x+y)^n}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{x^n+y^n}{2},$$

ce qui conclut.