Fonctions convexes

Généralités

Autocorrection A.

1. Soit $f : I \to J$ convexe et $g : J \to \mathbb{R}$ convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Énoncer et démontrer un autre résultat de composition analogue à celui-ci, mais mettant en jeu au moins une fonction concave.
3. Donner un contre-exemple si g n'est plus supposée croissante.

Autocorrection B.

Soit I, J deux intervalles ouverts et $f : I \to J$ une bijection convexe.

Que peut-on dire de la convexité de $f^{-1} : J \to I$?

Exercice 1.

1. Montrer que les fonctions convexes et concaves sont exactement les fonctions affines.
2. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ convexes telles que $f + g$ est affine. Montrer que f et g sont affines.

Exercice 2.

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexes et impaires.

Exercice 3.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair. À quelle condition la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ est-elle convexe ?

Exercice 4$^+$.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto x\,f(x)$ est convexe si et seulement si $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ l'est.

Exercice 5.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *strictement convexe* si, pour tous $a < b \in I$, on a

$$\forall \lambda \in]0, 1[\,, f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) < (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

1. Soit $f \in D^1(I)$. Montrer que f est strictement convexe si et seulement si f' croît strictement.
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement convexe. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ et $a_1, \dots, a_n \in I$. Montrer que si $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f(a_i)$, alors $a_1 = \dots = a_n$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geqslant n!$, et préciser les cas d'égalité.

Exercice 6$^+$.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que $\forall a, b \in \mathbb{R}, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$. Montrer que f est convexe.

Exercice 7.

Soit $f \in D^1(I)$ dont le graphe est au-dessus de toutes ses tangentes. Montrer que f est convexe.

Propriétés globales des fonctions convexes

Autocorrection C.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & f(a-x)+f(a+x) \end{cases}$ est croissante.

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ concave. Montrer $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$.

Exercice 9.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante.
2. Le résultat subsiste-t-il sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 10.

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe.

1. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ en lequel f admette un extremum local. Montrer qu'il s'agit d'un minimum global.
2. Que dire de l'ensemble des points en lesquels f admet un minimum ?

Applications

Autocorrection D.

Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leqslant (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$.

Autocorrection E.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, (x+y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n+y^n)$.

Exercice 11.

Soit $r_1, \ldots, r_n \geqslant 1$. Montrer que

$$\frac{n}{1+\sqrt[n]{r_1 \cdots r_n}} \leqslant \frac{1}{1+r_1}+\cdots+\frac{1}{1+r_n}.$$

Exercice 12.

Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Trouver λ et $\mu \in \mathbb{R}$ les plus petits possibles tels que

$$\forall x \in [-A, A], e^x \leqslant \lambda x+\mu.$$

Exercice 13.

Soit α, β, γ les angles (géométriques) d'un triangle. Montrer

$$\frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1+\sin\beta} + \frac{1}{1+\sin\gamma} \geqslant \frac{6}{2+\sqrt{3}}.$$

Exercice 14.

Soit $n \geqslant 4$. Montrer que de tous les polygones à n côtés inscrits dans un cercle, le polygone régulier est celui qui a l'aire maximale.

Exercice 15$^+$.

1. En utilisant notamment l'inégalité arithmético-géométrique pondérée, trouver quatre nombres réels positifs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que

$$x^2yzt \leqslant \alpha\, x^4y + \beta\, y^4z + \gamma\, z^4t + \delta\, t^4x.$$

2. En déduire

$$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}_+^*, xyzt = 1 \Rightarrow x + y + z + t \leqslant x^2y + y^2z + z^2t + t^2x.$$

Exercice 16^{++} (Inégalité de Popoviciu).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et $x, y, z \in I$. Montrer

$$\frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right] \leqslant \frac{1}{3}\big[f(x) + f(y) + f(z)\big] + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right).$$

Exercice 17$^+$ (Inégalités de Young, de Hölder et de Minkowski).

Dans tout l'exercice, on fixe $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer l'*inégalité de Young* : $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a^{1/p}b^{1/q} \leqslant \dfrac{1}{p}a + \dfrac{1}{q}b$.
2. Pour tout $\ell \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\|x\|_\ell = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^\ell\right)^{1/\ell}$.
   - (a) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.

     En utilisant l'inégalité de Young, montrer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \leqslant 1$.
   - (b) En déduire *l'inégalité de Hölder* : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \leqslant \|x\|_p\, \|x\|_q$.
   - (c) Peut-on étendre cette inégalité dans le cas $p = 1$?
3. Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$.
   - (a) Montrer $\|x+y\|_p^p \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|\, |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i|\, |x_i + y_i|^{p-1}$.
   - (b) En appliquant habilement l'inégalité de Hölder, montrer *l'inégalité de Minkowski* :

$$\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Mélange

Exercice 18^{+}.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction quelconque. Montrer qu'il existe une fonction convexe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g \leqslant f$ et que toute fonction convexe $h \leqslant f$ vérifie $g \leqslant h$.

Exercice 19^{+}.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ est dite *log-convexe* (ou *logarithmiquement convexe*) si $\ln \circ f$ est convexe.

1. Montrer qu'une fonction log-convexe est convexe. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que f est log-convexe si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, la fonction f^α est convexe.
3. Montrer que f est log-convexe si et seulement si, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\beta x} f(x)$ est convexe.
4. Montrer que la somme et le produit de deux fonctions log-convexes est log-convexe.

Exercice 20^{+}.

Soit $f \in C^3(\mathbb{R})$. Montrer $\exists a \in \mathbb{R} : f(a)\, f'(a)\, f''(a)\, f'''(a) \geqslant 0$.

Exercice 21^{++}. *Saclay*

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexes telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \max\big(f(x), g(x)\big) \geqslant 0$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, (1 - \lambda) f(x) + \lambda g(x) \geqslant 0$.