Analyse asymptotique

Exercice 16.
On pourra commencer par constater que le cours affirme que la réponse est oui **si l'on fait une hypothèse supplémentaire de régularité sur la fonction**.

Exercice 17.
Il est possible d'obtenir un tel développement asymptotique à l'aide du $\mathrm{DL}_n(0)$ de arctan.

Exercice 19.
On reviendra à une traduction, avec des ε, de l'hypothèse asymptotique.

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$;

(ii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}$;

(iii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$;

(iv) $u_n = \dfrac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$;

(v) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$;

(vi) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$;

(vii) $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(n)$;

(viii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Autocorrection B.
De la plus forte à la plus faible :

- $u_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$: (v) ;
- $u_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$: (viii) ;
- $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: (i), (ii), (iv), (vii) ;
- $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(1)$: (ix), (x) ;
- $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$: (vi) ;
- $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(n)$: (iii).

Autocorrection C.

L'inégalité de l'énoncé donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant \frac{v_n}{u_n} \leqslant \frac{w_n}{u_n}.$$

Comme $\frac{w_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, le théorème des gendarmes donne $\frac{v_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Autocorrection D.

Il n'y a pas d'implication logique :

- les suites $(n+n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient $n+n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$ mais pas $n+n^2 = n^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$;
- les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifient $\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ mais pas $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.
  Remarque. Ces suites ne sont pas définies sur $\mathbb{N}$ mais il est facile de contourner cette difficulté, soit en les prolongeant de façon arbitraire à $\mathbb{N}$, soit en les décalant, c'est-à-dire en considérant $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, etc. On ignore ici cette subtilité.

Autocorrection E.

(i) $e^x \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{4}{3}x + \frac{13}{18}x^2 + \frac{23}{81}x^3 + o(x^3)$;

(ii) $\sin(x)\ln(1+x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$;

(iii) $\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$;

(iv) $(e^x-1)\sin x = x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$;

(v) $\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$;

(vi) $e^{\cos x} - (1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{e}{2}x - \frac{23}{24}ex^2 + o(x^2)$;

(vii) $(\sin x)^4 = x^4 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{5}x^8 + o(x^8)$;

(viii) $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$;

(ix) $\frac{xe^{-x}}{2x+1} = x - 3x^2 + \frac{13}{2}x^3 - \frac{79}{6}x^4 + o(x^4)$;

(x) $(\cos x)^{1/x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{48}x^3 + o(x^3)$;

(xi) $(2+h)^4 = 16 + 32h + 24h^2 + 8h^3 + h^4 + o(h^{100})$;

(xii) $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + o(h^2)$;

(xiii) $\frac{1}{1+(1+h)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}h + \frac{1}{8}h^2 + o(h^2)$;

(xiv) $\exp(1+h) = e + eh + \frac{e}{2}h^2 + \frac{e}{6}h^3 + o(h^3)$;

(xv) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right)\cos\left(3\left(\frac{\pi}{3}+h\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}h + \frac{5\sqrt{3}}{2}h^2 + o(h^2)$;

(xvi) $\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right)} = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{5}{6}h^3 + o(h^3)$;

(xvii) $\frac{(1+h)\ln(1+h)}{(1+h)^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{12}h^3 + o(h^3)$.

Autocorrection F.

(i) Le dénominateur est $\frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$, donc $\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3}x^3$. Le numérateur est $-\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, donc $\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$. On a donc

$$\frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{\tan x - x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{3}{2x}.$$

En particulier, cette fonction diverge en 0 (sa valeur absolue tend vers $+\infty$).

(ii) On a $\tan h \underset{h\to 0}{\sim} h$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\ln\left(2(1+h)^2-1\right) &= \ln(1+4h+2h^2)\\ &= (4h+2h^2) + \underset{h\to 0}{o}\left(4h+2h^2\right) \qquad \text{car } 4h+2h^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0\\ &= 4h + \underset{h\to 0}{o}(h)\\ &\underset{h\to 0}{\sim} 4h,\end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad \frac{\ln(2(1+h)^2-1)}{\tan((1+h)-1)} \underset{h\to 0}{\sim} 4$$

$$\text{donc} \quad \frac{\ln(2(1+h)^2-1)}{\tan((1+h)-1)} \xrightarrow[h\to 0]{} 4$$

$$\text{donc} \quad \frac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)} \xrightarrow[x\to 1]{} 4.$$

(iii) On a $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x} = \frac{\sin^3 x - x^3}{x^3 \sin^3 x}$.
On a déjà $x^3\sin^3 x \underset{x\to 0}{\sim} x^6$.
Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\sin^3 x - x^3 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)^3 - x^3\\ &= x^3\left(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)^3 - x^3\\ &= x^3\left(1 - 3\frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) - x^3 \quad \text{car } -\frac{x^2}{6} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \text{ et } (1+h)^3 = 1+3h+\underset{h\to 0}{o}(h)\\ &= -\frac{1}{2}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\\ &\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^5.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2x}.$$

En particulier, cette fonction diverge en 0 (sa valeur absolue tend vers $+\infty$).

(iv) On a

$$\begin{aligned}x - \arctan x &= x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\\ &= \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3} \\ \text{et} \qquad \sin^3 x &\underset{x\to 0}{\sim} x^3 \\ \text{donc} \qquad \frac{x-\arctan x}{\sin^3 x} &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3} \\ \text{donc} \qquad \frac{x-\arctan x}{\sin^3 x} &\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(v) On a $(\cos x)^{\ln|x|} = \exp(\ln|x| \ln\cos x)$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \ln\cos x &= \ln(1+(\cos x - 1)) \\ &= (\cos x - 1) + \underset{x\to 0}{o}(\cos x - 1) && \text{car} \quad \cos x - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\ &= -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2). && \text{car} \quad \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Par croissance comparée, on a

$$\ln|x|\ \ln\cos x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{\ln|x|\ x^2}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Par continuité de l'exponentielle, on a

$$(\cos x)^{\ln|x|} = \exp(\ln|x| \ln\cos x) \xrightarrow[x\to 0]{} \exp(0) = 1.$$

(vi) On a

$$\begin{aligned} (1+h)^3 + 7(1+h)^2 - 8 &= \left(1 + 3h + \underset{h\to 0}{o}(h)\right) + 7\left(1 + 2h + \underset{h\to 0}{o}(h)\right) - 8 \\ &= 17h + \underset{h\to 0}{o}(h) \\ &\underset{h\to 0}{\sim} 17h \\ \text{et} \quad (1+h)^4 + (1+h)^3 - 2 &= \left(1 + 4h + \underset{h\to 0}{o}(h)\right) + \left(1 + 3h + \underset{h\to 0}{o}(h)\right) - 2 \\ &= 7h + \underset{h\to 0}{o}(h) \\ &\underset{h\to 0}{\sim} 7h. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi,} \quad \frac{(1+h)^3 + 7(1+h)^2 - 8}{(1+h)^4 + (1+h)^3 - 2} &\underset{h\to 0}{\sim} \frac{7}{17} \\ \text{donc} \quad \frac{(1+h)^3 + 7(1+h)^2 - 8}{(1+h)^4 + (1+h)^3 - 2} &\xrightarrow[h\to 0]{} \frac{7}{17}. \end{aligned}$$

In fine,

$$\frac{x^3 + 7x^2 - 8}{x^4 + x^3 - 2} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{7}{17}.$$

Autocorrection G.

(i) $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$;

(ii) $\dfrac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x} \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{2}{x}$ et $\dfrac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{2}$;

(iii) $\ln(1+x^2)-\sin(x^2)+2\cos^2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\ln x$;

(iv) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x-1}} \underset{x\to1}{\sim} \sqrt{x-1}$;

(v) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2+x} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2+x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$;

(vi) $1+e^{e^{e^x}}-\arctan x \underset{x\to-\infty}{\sim} 1+e+\dfrac{\pi}{2}$;

(vii) $\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^{-1/4}}{\sqrt{2}}$;

(viii) $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to\pi}{\sim} \dfrac{\pi-x}{\sqrt{\pi}}$;

(ix) $\dfrac{\sqrt{x}^3+2}{\sqrt[3]{x}^2+3} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{5/6}$;

(x) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$;

(xi) $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\ln x}$;

(xii) Pour tout $x>e$, on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{\ln(x+1)}-\sqrt{\ln(x-1)} &= \sqrt{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}-\sqrt{\ln\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)}\\
&= \sqrt{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{\ln x+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}\\
&= \sqrt{\ln x}\left(\sqrt{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}-\sqrt{1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}\right).
\end{aligned}$$

Cette expression peut paraître horrible, mais on a en fait appliqué à fond l'idée de factoriser par les termes prépondérants, et on se retrouve maintenant dans une position idéale pour utiliser des DL de $u\mapsto\ln(1+u)$ ou $u\mapsto\sqrt{1+u}$.

Or, quand $x\to+\infty$,

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{car} \begin{cases}\ln(1+u)=1+u+\underset{u\to0}{o}(u)\\ \dfrac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0\end{cases}$$

$$\text{donc} \qquad \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}=\frac{1}{x\,\ln x}+o\left(\frac{1}{x\,\ln x}\right).$$

Ainsi,

$$\sqrt{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}=\sqrt{1+\frac{1}{x\,\ln x}+o\left(\frac{1}{x\,\ln x}\right)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x\ \ln x} + o\left(\frac{1}{x\ \ln x}\right) \quad \text{car} \begin{cases} \sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u + \underset{u\to 0}{o}(u) \\ \frac{1}{x\ \ln x} + o\left(\frac{1}{x\ \ln x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \frac{1}{x\ \ln x} + o\left(\frac{1}{x\ \ln x}\right) = O\left(\frac{1}{x\ \ln x}\right). \end{cases}$$

Exactement de la même façon,

$$\sqrt{1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\ln x}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x\ \ln x} + o\left(\frac{1}{x\ \ln x}\right).$$

On en déduit

$$\sqrt{1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x}} - \sqrt{1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\ln x}} = \frac{1}{x\ \ln x} + o\left(\frac{1}{x\ \ln x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x\ \ln x}.$$

Ainsi, d'après les propriétés multiplicatives de l'équivalence,

$$\sqrt{\ln(1+x)} - \sqrt{\ln(1-x)} = \sqrt{\ln x}\left(\sqrt{1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x}} - \sqrt{1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\ln x}}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\ln x} \times \frac{1}{x\ \ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}.$$

(xiii) $x\ln(x+1) - (x+1)\ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln x$;

(xiv) $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \underset{x\to 0}{\sim} x^2$;

(xv) $\tan x - \sin x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^3$;

(xvi) $\ln(1+\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(xvii) $\ln(\ln(1+x)) \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$;

(xviii) $\ln(\cos x) \underset{x\to\pi/2}{\sim} \ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Autocorrection H.

(i) $\frac{3n^4 - 2n^2 + 1}{2n^3 + 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}n$;

(ii) $\frac{\ln n + n + 1}{3n^2 + 2n + 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$;

(iii) $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$;

(iv) $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$;

(v) $\sin\sin\frac{\pi}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2}$;

(vi) $\frac{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\tan\frac{\pi}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{\pi}$;

(vii) $\ln(n+2)-\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$;

(viii) $(2n+\ln n^2)e^{-(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2ne^{-(n+1)}$;

(ix) $\dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\dfrac{\ln n}{n}$;

(x) $\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{n}$;

(xi) $\dfrac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{5(\ln n)^3-2n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{n}{2}$;

(xii) $\dfrac{n!+e^n}{2^n+3^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n!}{3^n}$;

(xiii) $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{n^2}$;

(xiv) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

(xv) $\sqrt{\ln(n+1)-\ln(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{n}}$.