Analyse asymptotique

Généralités

Autocorrection A.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Écrire les assertions suivantes sous des formes plus simples.

(i) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{12n^2}$;

(ii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2+2n+3}{3n^3-n}$;

(iii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n+n^2}{\ln n - n^3}$;

(iv) $u_n = \left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\left(\dfrac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{10}}\right)\right)$;

(v) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$;

(vi) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n) - \underset{n\to+\infty}{o}(n)$;

(vii) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n) - \underset{n\to+\infty}{O}(n)$;

(viii) $u_n = (1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1))v_n$.

Autocorrection B.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Classer les assertions suivantes de la plus forte (c'est-à-dire la plus contraignante) à la plus faible. Il peut y avoir des *ex-æquo*.

(i) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$;

(ii) $u_n = \exp\left(\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)$;

(iii) $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(n)$;

(iv) $u_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$;

(v) $u_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

(vi) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$;

(vii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$;

(viii) $u_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

(ix) $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(1)$;

(x) $u_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{O}(1)$.

Autocorrection C.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telles que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Autocorrection D.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Y a-t-il une implication logique entre les assertions $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$?

Exercice 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles divergeant vers $+\infty$.

On suppose $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Exercice 2.

Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ sans que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Exercice 3.

Trouver $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que l'on ait, pour tout $\alpha > 0$, les relations de négligeabilité $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x))$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\alpha x})$.

Exercice 4.

Peut-on trouver $f \in C^0([0,1])$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall \alpha > 0, x^\alpha \underset{x\to 0}{=} o(f(x))$?

Exercice 5.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

Déterminer, en justifiant, si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse.

(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$.

(ii) $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$ si et seulement si $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$

(iii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

(iv) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

Exercice 6. ☑

Classer les suites par ordre de négligeabilité les suites dont les termes généraux sont les suivants.

(i) $\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{\ln n}{n}, \dfrac{\ln n}{n^2}, \dfrac{1}{\ln n}, \dfrac{1}{n \ln n}$.

(ii) $n, n^2, n\ln n, \sqrt{n}\ln n, \dfrac{n}{\ln n}, \dfrac{n^2}{\ln n}$.

Exercice 7.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$.

Exercice 8. ☑

Soit u une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Déterminer un équivalent simple de u.

Exercice 9. ☑

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis déterminer un équivalent simple de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Développements limités

Exercice 10.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} e^{-x^{-2}} \cos\left(e^{x^{-2}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{cases}$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. Quelle est la classe de régularité de f ?

Calculs directs

Autocorrection E. ☑

Déterminer les développements limités suivants.

(i) $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^x \sqrt[3]{1+x}$;

(ii) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sin(x)\ln(1+x)$;

(iii) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$;

(iv) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (e^x - 1)\sin x$;

(v) $DL_2(0)$ de $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$;

(vi) $DL_2(0)$ de $x \mapsto e^{\cos x} - (1+x)^{\frac{1}{x}}$;

(vii) $DL_8(0)$ de $x \mapsto (\sin x)^4$;

(viii) $DL_6(0)$ de $x \mapsto \tan x$;

(ix) $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{xe^{-x}}{2x+1}$;

(x) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (\cos x)^{1/x}$;

(xi) $DL_{100}(2)$ de $x \mapsto x^4$;

(xii) $DL_2(1)$ de $x \mapsto \sqrt{x}$;

(xiii) $DL_2(1)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$;

(xiv) $DL_3(1)$ de exp ;

(xv) $DL_2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ de $x \mapsto \sin(x)\cos(3x)$;

(xvi) $DL_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ de $x \mapsto \sqrt{\tan x}$;

(xvii) $DL_3(1)$ de $x \mapsto \dfrac{x\ln x}{x^2 - 1}$.

Exercice 11.

1. À l'aide de la méthode générale de calcul des DL, déterminer un $DL_8(0)$ de tan.
2. Retrouver ce $DL_8(0)$ à l'aide du théorème de Taylor-Young.
   Pourquoi est-ce ici une idée raisonnable ?
3. Écrire un algorithme pour calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le $DL_n(0)$ de tan.
   Pour les plus courageux, l'implémenter, et vérifier que la décoration au fond de la salle n'est pas mensongère.

Exercice 12. ☑

1. Donner le $DL_3(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{1/x}$.
2. Donner les $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.

Calculs moins directs

Exercice 13.

Soit $f : x \mapsto \arctan \dfrac{\sqrt{3}+x}{1+x\sqrt{3}}$. En commençant par calculer f', déterminer le $DL_4(0)$ de f.

Exercice 14.

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^{x^2} \end{cases}.$
   (a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
   (b) Montrer que sa réciproque f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 5 de la forme
   $$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5).$$
   (c) En utilisant l'égalité $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, déterminer a, b et c.
2. Suivre le même schéma pour obtenir un $DL_3(0)$ de la réciproque de $x \mapsto 2x + \sin x$.

Exercice 15.

Donner le $DL_{12}(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 16.

Une fonction paire telle que $f(x) = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ vérifie-t-elle $f(x) = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$?

Autres développements asymptotiques

Exercice 17.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner un développement asymptotique de arctan en $+\infty$, à la précision $o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

Exercice 18.

1. Peut-on trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a\sin x + b\cos x = x + \underset{x\to 0}{O}(x^5)$?
2. Parmi les fonctions $(f_{a,b})_{a,b\in\mathbb{R}}$ définies par $f_{a,b} : x \mapsto \sin x - \frac{x + ax^3}{1 + bx^2}$, y en a-t-il une qui soit négligeable (en 0) devant toutes les autres ?
3. Peut-on trouver deux réels a et b tels qu'il existe une constante C vérifiant
   $$\frac{1}{x} + \frac{a}{\ln(1+x)} + \frac{b}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} Cx \ ?$$

Exercice 19$^+$.

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 20$^+$.

Donner un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Applications

Calcul de limites et d'équivalents

Autocorrection F.

Étudier les limites des fonctions suivantes, au voisinage du point donné.

(i) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)-\sin(x)}{\tan x - x}$ (en 0) ;

(ii) $x \mapsto \dfrac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)}$ (en 1) ;

(iii) $x \mapsto \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{\sin^3 x}$ (en 0) ;

(iv) $x \mapsto \dfrac{x-\arctan x}{\sin^3 x}$ (en 0) ;

(v) $x \mapsto (\cos x)^{\ln|x|}$ (en 0) ;

(vi) $x \mapsto \dfrac{x^3+7x^2-8}{x^4+x^3-2}$ (en 1).

Autocorrection G.

Donner un équivalent simple des fonctions suivantes, au voisinage du point donné.

(i) $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ (en $+\infty$) ;

(ii) $x \mapsto \dfrac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x}$ (en 0 et en $+\infty$) ;

(iii) $x \mapsto \ln(1+x^2)-\sin(x^2)+2\cos^2(x)$ (en $+\infty$) ;

(iv) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$ (en 1) ;

(v) $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{2+x}$ (en 0 et en $+\infty$) ;

(vi) $x \mapsto 1 + e^{e^{e^x}} - \arctan x$ (en $-\infty$) ;

(vii) $x \mapsto \sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$ (en $+\infty$) ;

(viii) $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ (en π) ;

(ix) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}^3+2}{\sqrt[3]{x}^2+3}$ (en $+\infty$) ;

(x) $x \mapsto \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ (en $+\infty$) ;

(xi) $x \mapsto \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} - 1$ (en $+\infty$) ;

(xii) $x \mapsto \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)}$ (en $+\infty$) ;

(xiii) $x \mapsto x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$ (en $+\infty$) ;

(xiv) $x \mapsto \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ (en 0) ;

(xv) $x \mapsto \tan x - \sin x$ (en 0) ;

(xvi) $x \mapsto \ln(1+\sin x)$ (en 0) ;

(xvii) $x \mapsto \ln(\ln(1+x))$ (en 0) ;

(xviii) $x \mapsto \ln(\cos x)$ (en $\pi/2$).

Autocorrection H.

Donner un équivalent simple des suites dont les termes généraux sont les suivants.

(i) $\dfrac{3n^4-2n^2+1}{2n^3+1}$;

(ii) $\dfrac{\ln n + n + 1}{3n^2+2n+1}$;

(iii) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)$;

(iv) $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$;

(v) $\sin\sin\dfrac{\pi}{n^2}$;

(vi) $\dfrac{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\tan\frac{\pi}{n}}$;

(vii) $\ln(n+2)-\ln(n+1)$;

(viii) $(2n+\ln n^2)e^{-(n+1)}$;

(ix) $\dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$;

(x) $\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$;

(xi) $\dfrac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{5(\ln n)^3-2n^2}$;

(xii) $\dfrac{n!+e^n}{2^n+3^n}$;

(xiii) $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n-1}$;

(xiv) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$;

(xv) $\sqrt{\ln(n+1)-\ln(n-1)}$.

Exercice 21⁺. ☑

1. Déterminer un équivalent de $x \mapsto x^{\sin x} - (\sin x)^x$ au voisinage de 0.
2. Déterminer un équivalent de $x \mapsto \operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)$ au voisinage de 0.

Exercice 22. ☑

Soit $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ impaires telles que $f'(0) = g'(0) = 1$. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(g(x)) - g(f(x))}{x^6}$.

Exercice 23. X

On considère la suite croissante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ prenant une fois la valeur $u_1 = 1$, deux fois la valeur 2, trois fois la valeur 3, etc.

Donner une expression de u, et en déterminer un équivalent.

Exercice 24⁺ (Formule de Stirling).

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\dfrac{n^n \sqrt{n}}{e^n \, n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\ln u_{n+1} - \ln u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Montrer que $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{12\, n^2}$.
2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît à partir d'un certain rang et converge vers une limite $\lambda > 0$.

Remarque. Cela montre $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \lambda \sqrt{n} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$. On a en fait $\lambda = \sqrt{2\pi}$.

Suites récurrentes et implicites

Exercice 25.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire, de degré 3, possédant trois racines distinctes a, b et c. Exprimer les coefficients de P en fonction de a, b et c.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = X^3 - (n+2)X^2 + (2n+1)X - 1 \in \mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que, pour n assez grand, P_n possède trois racines a_n, b_n et c_n vérifiant
$$0 < a_n < 1 < b_n < 3 < \frac{2n+1}{3} < c_n.$$
3. Déterminer des équivalents simples des suites a, b et c ainsi définies.

Exercice 26. ☑

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$, et que $u_n \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$.
2. Montrer que $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
3. Donner un équivalent simple de $\left(\dfrac{1}{n} - u_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 27.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln x = n$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera u_n.
2. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
3. Montrer que $u_n = n - \ln n + \underset{n\to\infty}{o}(1)$.

Exercice 28. ☑

On considère une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 3u_n^2$.

1. Montrer que, si $u_0 \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$, alors u est à valeurs strictement positives et converge vers 0.

On suppose dans la suite de l'exercice que $u_0 \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$.

2. **Équivalent conjectural**.
   (a) Pour tous $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, on note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\lambda\, n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Donner un équivalent de $(v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et de $\left(-3v_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Résoudre (à la physicienne) l'équation différentielle $y' + 3y^2 = 0$.
   (c) Utiliser l'une ou l'autre des questions précédentes pour conjecturer un équivalent de u.
3. **Équivalent, par comparaison à une intégrale.**
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{dt}{t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$.
   (b) En utilisant le théorème de Cesàro, donner un équivalent de $\left(\displaystyle\int_{u_n}^{u_0} \frac{dt}{t}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire un équivalent de u.
4. **Développement asymptotique, *via* une suite auxiliaire.** On définit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{3u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer $w_{n+1} - w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et en déduire à nouveau un équivalent de u.
   (b) Montrer $\big(w_{n+1} - (n+1)\big) - \big(w_n - n\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
   (c) Montrer que cela entraîne $w_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
   (d) En déduire un développement asymptotique à deux termes de u.

Exercice 29. ☑

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. Montrer que u est à valeurs > 0 et converge vers 0.
2. Montrer que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^3}{3}$, et obtenir un équivalent de u.

Exercice 30. *X*

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. En donner un équivalent.

Exercice 31. *Mines*

On définit la suite $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $x_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{\ln x_n}$. En déterminer un équivalent.

Exercice 32$^+$. *X*

Soit $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \exp(-x_n)$. En donner un développement asymptotique à deux termes.

Exercice 33. ☑

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$.

1. Montrer que $u_n = n + \underset{n \to +\infty}{O}(1)$.
2. En déduire que $u_{n+1} = n + \dfrac{1}{2} + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$ et en déduire un développement asymptotique de u à la précision $o(1)$.
3. Obtenir un développement asymptotique de u à la précision $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Étude locale ou asymptotique de fonctions

Exercice 34.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x^2}{e^x - e^{-x}} & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$

1. Montrer que f possède un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le calculer.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f'(0)$?
3. Préciser la position relative de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 35.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{1+1/x} & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f possède un développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 3 et le calculer. Qu'en déduit-on sur le graphe de f ?

Exercice 36. ☑

Étudier au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\arcsin x}$.

(Est-elle prolongeable par continuité ? le prolongement est-il dérivable ? que dire de la position relative du graphe et de sa tangente ?)

Exercice 37. ☑

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & (x+1)e^{1/x}. \end{cases}$

Étudier les asymptotes du graphe de f, et la position relative du graphe et de ses asymptotes.

Autres applications

Exercice 38.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang, par exemple en étudiant le quotient de deux termes successifs.

Exercice 39.

1. Déterminer un développement asymptotique de $x \mapsto \sqrt{x^4 + x^3 + 1}$ à la précision $\frac{1}{x}$ en $+\infty$.
2. Montrer que l'ensemble $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, y^2 = x^4 + x^3 + 1 \right\}$ est fini.

Exercice 40.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $f = \sin^n$. Calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}(0)$.

Exercice 41.

Soit $n \geqslant 1$. Soit $f : x \mapsto \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
3. En interprétant f comme une somme, retrouver la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice 42.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons différentes le $DL_n(0)$ de $x \mapsto (e^x - 1)^n$, calculer, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, la somme

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$