Espaces vectoriels

Espaces vectoriels

Exercice 1.
On définit sur $\mathbb{R}^2$ les opérations $+$ et $\cdot$ par

- Pour (x, y) et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, 0)$.

Ces lois munissent-elles $\mathbb{R}^2$ d'une structure d'espace vectoriel ?

Exercice 2.
On définit sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ les opérations $+$ et $\cdot$ par

- Pour (x, y) et $(x', y') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $(x, y) + (x', y') = (x\,x', y + y')$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\lambda \cdot (x, y) = (x^\lambda, \lambda b)$.

Ces lois munissent-elles $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ d'une structure d'espace vectoriel ?

Exercice 3$^+$.
Munir $]-1, 1[^n$ d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 4.
Soit $(A, +)$ un groupe abélien et p un nombre premier.

1. Montrer qu'il existe au plus une loi $\cdot : \mathbb{F}_p \times A \to A$ telle que $(A, +, \cdot)$ soit un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel.
2. Montrer qu'il existe une telle loi si et seulement si $\forall x \in A, \underbrace{x + \cdots + x}_{p \text{ fois}} = 0_A$.

   (On dit dans ce cas que A est un p-*groupe abélien élémentaire*).

Exercice 5^{++}.
Soit $(A, +)$ un groupe abélien.

1. Montrer qu'il existe au plus une loi $\cdot : \mathbb{Q} \times A \to A$ telle que $(A, +, \cdot)$ soit un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
2. À quelle condition existe-t-il une telle loi ?

Familles de vecteurs

Autocorrection A.

1. Le vecteur $(3, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(2, 1, 0)$?
2. Le vecteur $(3, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(1, 1, 1)$?
3. La fonction $(x \mapsto \cos(2x)) \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ est-elle combinaison linéaire des fonctions cos et sin ?
4. Quelles suites sont combinaisons linéaires des suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$?

Autocorrection B. ☑

On définit $a = (-1, 2, 1)$, $b = (0, 1, -1)$, $u = (1, 0, -3)$ et $v = (-2, 5, 1)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer un vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(a, b)$.
2. Montrer que $\mathrm{Vect}(a, b) = \mathrm{Vect}(u, v)$.
3. Trouver trois réels α, β et γ non tous nuls tels que $\forall (x, y, z) \in \mathrm{Vect}(a, b)$, $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.
4. Montrer que $\mathrm{Vect}(a, b) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \right\}$.

Autocorrection C. ☑

Voici une liste de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ donnés soit comme sous-espace vectoriel engendré par une famille libre, soit comme ensemble de vecteurs vérifiant une ou deux équations linéaires. Pour chacun d'entre eux, donner une description de l'autre type.

(i) $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y - z = 0 \right\}$;

(ii) $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -2x + 2y - 3z = 0 \right\}$;

(iii) $\mathrm{Vect}\left((1, 2, -1), (2, 3, -3) \right)$;

(iv) $\mathrm{Vect}\left((1, 1, 1), (1, -1, 0) \right)$;

(v) $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 2x + y - z = 0 \right\}$;

(vi) $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - 2z = x + 3y - 2z = 0 \right\}$;

(vii) $\mathrm{Vect}(1, 2, -1)$;

(viii) $\mathrm{Vect}(2, 3, -3)$.

Exercice 6.

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que l'on a $\mathrm{Vect}(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}) = \mathrm{Vect}(\exp, x \mapsto \exp(-x))$.
2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, montrer que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\left(x \mapsto \cos(2x), \cos^2, \sin^2 \right)$ peut s'obtenir comme $\mathrm{Vect}(f, g)$, pour deux fonctions $f, g \in \mathbb{R}^{[-1,1]}$ bien choisies.

Exercice 7.

1. Soit $A \in M_2(K)$. Montrer que $A^2 \in \mathrm{Vect}(I_2, A)$.
2. Donner un exemple de matrice $A \in M_3(K)$ telle que $A^2 \notin \mathrm{Vect}(I_3, A)$.

Familles libres, génératrices, bases

Autocorrection D. ☑

1. Montrer que $((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de $(3, 7, -2)$ dans cette base.
2. On définit $F = \mathrm{Vect}\left((1, -1, 1), (0, -1, 2), (1, -2, 3) \right) \subseteq K^3$. En donner une base et montrer que $F = \left\{ (x, y, z) \in K^3 \,\middle|\, x + 2y + z = 0 \right\}$.
3. Donner une base de $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, x - y + 2z = 0 \right\}$.
4. Donner une base de $\left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, 3x - 2y + z - 2t = 0 \text{ et } 2x + y = 0 \right\}$.

Autocorrection E. ☑

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants.

$$a = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix}3\\7\\4\end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

Pour chacune des questions suivantes, indiquez ce qu'il faudrait vérifier pour répondre à la question, sous la forme :

Il s'agit de
- *montrer que le système* $\begin{cases} \cdots = \cdots \\ \cdots = \cdots \end{cases}$ *a des solutions / a une unique solution / n'a pas de solution.*
- *trouver toutes les solutions du système* $\begin{cases} \cdots = \cdots \\ \cdots = \cdots \end{cases}$
- *... (liste non exhaustive).*

On ne cherchera pas à faire les calculs.

(i) Montrer que la famille (a, b, c) est libre.

(ii) Montrer que $e \notin \mathrm{Vect}(c, f)$.

(iii) Montrer que (d, e, f) est génératrice.

(iv) Montrer que $\mathrm{Vect}(d, g) \subseteq \mathrm{Vect}(a, b, f)$.

(v) Déterminer toutes les relations de liaison entre a, b, c et d.

Exercice 8. ☑

Soit $n \geqslant 2$. Soit E un espace vectoriel de base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Montrer que la famille $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_{n-1} + e_n)$ est libre.

Exercice 9. ☑

Soit E un espace vectoriel possédant une famille libre $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

On note $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ et, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i = u + e_i$.

Montrer que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée si et seulement si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_i = -1$.

Exercice 10. ☑

1. Montrer que les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes.
2. Montrer que les fonctions cos, sin et exp sont linéairement indépendantes.

Exercice 11$^+$. ☑

1. Montrer que $\left(\cos^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
2. Montrer que $\mathrm{Vect}\left(\cos^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \cos(nx)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $\left(x \mapsto \cos(nx)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

Exercice 12⁺.

1. Montrer que la famille $\left(x \mapsto e^{\alpha x}\right)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.
2. Montrer que la famille $\left(x \mapsto |x-\alpha|\right)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 13.
Construire une famille libre infinie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 14.
Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. À quelle condition la famille $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle liée ?

Exercice 15.
Peut-on trouver une base de $M_n(\mathbb{R})$ composée de matrices inversibles ?

Exercice 16.

1. Montrer que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est $\mathbb{Q}$-libre (c'est-à-dire qu'il s'agit d'une famille libre si l'on munit $\mathbb{R}$ de sa structure naturelle de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel).
2. En déduire qu'aucun cercle centré en $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ne contient plusieurs points à coordonnées rationnelles.

Exercice 17.
On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que la famille $(\ln p)_{p \in \mathcal{P}}$ est $\mathbb{Q}$-libre.

Exercice 18⁺ (Théorème de la base télescopique).
Soit $M/L/K$ une tour d'extensions de corps (c'est-à-dire que L est un sous-corps de M, et K un sous-corps de L). On suppose disposer d'une L-base $(y_j)_{j \in J}$ de M et d'une K-base $(x_i)_{i \in I}$ de L.

Montrer que $(x_i\, y_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une K-base de M.

Sous-espaces vectoriels

Autocorrection F.
Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

(i) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = y\right\}$;

(ii) $\left\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \,\middle|\, x = y\right\}$;

(iii) $\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-) \mid x = y\}$;

(iv) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| = |y|\right\}$;

(v) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geqslant y\right\}$;

(vi) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + y = 0\right\}$;

(vii) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + y = 1\right\}$;

(viii) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$;

(ix) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 0\right\}$;

(x) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \geqslant 0\right\}$.

Autocorrection G.

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

(i) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + 3y + 4z = 0\right\}$;

(ii) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y - z + 1 = 0\right\}$;

(iii) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = 2y = 4z\right\}$;

(iv) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{array}\right\}$;

(v) $\{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$;

(vi) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, xyz = 0\right\}$.

Exercice 19.

Soit $n \geqslant 2$. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^n$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

(i) $\{(0, 0, \ldots, 0)\}$;

(ii) $\left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$;

(iii) $\left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$;

(iv) $\left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} 2^i x_i = 0\right\}$;

(v) l'ensemble des n-uplets ayant au plus une coordonnée non nulle ;

(vi) $\mathbb{Z}^n$.

Exercice 20.

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

(i) l'ensemble des suites croissantes ;

(ii) l'ensemble des suites monotones ;

(iii) l'ensemble des suites minorées ;

(iv) l'ensemble des suites bornées ;

(v) l'ensemble des suites convergentes ;

(vi) l'ensemble des suites divergentes ;

(vii) l'ensemble des suites convergeant vers 0 ;

(viii) l'ensemble des suites convergeant vers 1 ;

(ix) l'ensemble des suites constantes ;

(x) l'ensemble des suites stationnaires ;

(xi) l'ensemble des suites 12-périodiques ;

(xii) l'ensemble des suites périodiques.

Exercice 21.

Les parties suivantes de $\mathbb{R}[X]$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ? ($P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$ sont fixés.)

(i) l'ensemble des polynômes de degré n ;

(ii) l'ensemble des polynômes admettant 0 et 1 comme racines ;

(iii) l'ensemble des polynômes admettant au moins deux racines ;

(iv) $\{PQ \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}$;

(v) $\{Q \in \mathbb{R}[X] \mid \exists R \in \mathbb{R}[X] : QR = P\}$.

Exercice 22.

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ? ($x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ étant fixés.)

(i) l'ensemble des fonctions croissantes ;

(ii) l'ensemble des fonctions monotones ;

(iii) l'ensemble des fonctions qui s'écrivent comme différence de deux fonctions croissantes ;

(iv) $\left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dérivables} \,\middle|\, f(0) + f(1) = f'(0)\right\}$;

(v) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x_0) = y_0\}$;

(vi) $\{x \mapsto A\cos(x + \varphi) \mid A, \varphi \in \mathbb{R}\}$;

(vii) l'ensemble des fonctions ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

Exercice 23.

Soit $E \subseteq K^n$ un sous-espace vectoriel tel que

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \neq 0.$$

Montrer qu'il existe $v \in E$ tel que $E = \mathrm{Vect}(v)$.

Exercice 24⁺.

1. Déterminer $\mathrm{Vect}\left\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,\middle|\, f \geqslant 0 \right\}$.
2. Déterminer $\mathrm{Vect}\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0\}$.

Exercice 25⁺.

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Déterminer $\mathrm{Vect}(E \setminus F)$.

Exercice 26⁺.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $F, G \subseteq E$ deux sous-espaces vectoriels.

Montrer que $F \cup G$ n'est un sous-espace vectoriel de E que si $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Bases de sous-espaces vectoriels

Exercice 27 (Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$).

1. Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
   Traduire la question « w est-il combinaison linéaire de u et v ? » en termes de systèmes linéaires.
2. Montrer que si u et v ne sont pas colinéaires, alors la famille (u, v) engendre $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire une classification de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 28.

Déterminer si les familles suivantes sont des bases de $K_2[X]$ et, le cas échéant, déterminer les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans cette base.

(i) $(1, X-1, (X-1))^2$; (ii) $(X^2 + X, X^2 + 1, X + 1)$; (iii) $((X-1)^2, X^2, (X+1)^2)$.

Exercice 29⁺.

Soit $a \neq b \in \mathbb{C}$. Montrer que $\left((X-a)^k (X-b)^{n-k}\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 30⁺.

1. Soit E un espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille génératrice de E. Notons
$$J = \{j \in [\![1, p]\!] \mid x_j \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{j-1})\}.$$
   Montrer que $(x_j)_{i \in J}$ est une base de E.
2. On considère la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et le sous-espace vectoriel $V = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. En utilisant la question précédente, donner une base de V.
3. Soit $A \in M_{n,p}(K)$. On suppose avoir trouvé $P \in GL_n(K)$ tel que $PA = B$ soit échelonnée réduite. Expliquer comment trouver une base de im A.

Exercice 31.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1} \in \mathbb{K}_n[X]$.

Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Sommes et intersections

Autocorrection H.

On définit les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}\left((1,1,0),(0,1,1)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}(1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 32.

Soit $n \geqslant 2$. On note $F = \mathrm{Vect}(1,1,\ldots,1)$ et $G = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\}$.

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 33.

On définit

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - y + z - t = 0 \right\}, \quad F = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + z = y + t = 0 \right\}.$$

Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 34.

Montrer que $\left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; P(X^2) = X^2 P(X) \right\}$ et $\left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; P(1) = P(2) \right\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 35.

Soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts et, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $F_j = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid \forall i \in [\![0, n]\!] \setminus \{j\}, P(a_i) = 0\}$.

Montrer que $\mathbb{K}_n[X] = \bigoplus_{j=0}^{n} F_j$.

Exercice 36.

1. Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
2. Soit E l'ensemble des fonctions dérivables en 0. Montrer que $F = \left\{ f \in E \;\middle|\; f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 0 \right\}$ et l'ensemble des fonctions affines sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Généraliser.

Exercice 37.

Montrer que $\left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; f(x) = \underset{x \to 0}{o}(x^n) \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$, et en trouver un supplémentaire.

Exercice 38.

Soit A, B et C trois parties d'un espace vectoriel E.

1. Comparer $\mathrm{Vect}(B \cup C)$ et $\mathrm{Vect}(B) + \mathrm{Vect}(C)$.
2. Comparer $\mathrm{Vect}(A)$ et $\mathrm{Vect}(A \cup B) \cap \mathrm{Vect}(A \cup C)$.

Exercice 39.

Soit E un K-espace vectoriel et $A, B, C \subseteq E$ trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer les propriétés suivantes.

1. $A \cap B = A + B \Leftrightarrow A = B$.
2. $(A \cap B) + (A \cap C) \subseteq A \cap (B + C)$. Montrer que l'inclusion peut être stricte.
3. $B \subseteq A \Rightarrow (A \cap B) + (A \cap C) = A \cap (B + C)$.

Exercice 40. ☑

Soit F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $(F \cap G) \oplus H = G$.

Montrer que $F + G = F \oplus H$.

Exercice 41^{+}.

Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F+H = G+H$, $F \cap H = G \cap H$, et $F \subseteq G$. Montrer qu'alors $F = G$.

Montrer que la conclusion ne tient pas si l'on omet la troisième hypothèse.