Applications linéaires

Exercice 5.
On pourra s'inspirer de la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique.

Exercice 9.
On pourra montrer que si c'était le cas, $\ker D$ contiendrait une famille libre de deux vecteurs.

Exercice 22.
Attention : si $x \neq 0_E$, dire que x et $u(x)$ sont colinéaires signifie que l'on peut trouver un scalaire λ_x **dépendant de** x tel que $u(x) = \lambda_x x$. Il n'y a *a priori* aucune raison que tous les λ_x vaillent la même chose, c'est précisément ce qu'il faut montrer !

Exercice 33.
Pour la dernière question, on pourra contempler la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 34.

3. On pourra utiliser la propriété universelle de la somme directe pour définir $f^\sharp$ séparément sur $\ker f$ et $\operatorname{im} f$, après avoir remarqué que f induisait un automorphisme de $\operatorname{im} f$.

Autocorrection

Autocorrection A.
Dans toutes les questions, on note φ l'application de l'énoncé.

(i) **Non linéaire.** Par exemple, $\varphi(1,0) = \varphi(0,1) = 0$, alors que $\varphi(1,1) = 1 \neq \varphi(1,0) + \varphi(0,1)$.

(ii) **Non linéaire.** Par exemple, $\varphi(0,0,0) = (1,0,0) \neq (0,0,0)$.

(iii) **Linéaire.** On peut vérifier les deux axiomes, mais il est plus simple de constater qu'il s'agit de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(K).$$

(iv) **Non linéaire.** Par exemple, $\varphi(0) = 1 \neq 0$.

(v) **Non linéaire.** Par exemple, $\varphi(-1) = 1 \neq -1 = -1 \times \varphi(1)$.

(vi) **Non linéaire.** Le domaine n'est même pas un espace vectoriel.

(vii) **Non linéaire.** Par exemple, $\varphi(2,0) = 4 \neq 2 = 2 \times 1 = 2\,\varphi(1,0)$.

(viii) **Linéaire.** Il s'agit de l'application linéaire canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(K)$.

(ix) **Non linéaire.** Par exemple, $\varphi((1,2)) = 1$ alors que

$$\varphi\left(-(1,2)\right) = \varphi((-1,-2)) = -2.$$

(x) **Linéaire.** Soit $P, Q \in K[X]$ et $\lambda \in K$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X^2) \\ &= \lambda P(X^2) + Q(X^2) \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q).\end{aligned}$$

(xi) **Non linéaire.** Par exemple, $\varphi(2X) = 4X^2 \neq 2X^2 = 2\varphi(X)$.

(xii) **Linéaire.** Vérifions-le méthodiquement.
Remarquons déjà que l'application est bien définie car, si $f \in C^2(\mathbb{R})$, alors f'', f' et f sont toutes continues (au moins), donc $f'' - 2f' + f$ aussi.

- Soit $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(f+g) &= (f+g)'' - 2(f+g)' + (f+g) \\ &= f'' + g'' - 2f' - 2g' + f + g \\ &= \varphi(f) + \varphi(g).\end{aligned}$$

- Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f) &= (\lambda f)'' - 2(\lambda f)' + \lambda f \\ &= \lambda f'' - 2\lambda f' + \lambda f \\ &= \lambda\varphi(f).\end{aligned}$$

Cela montre que φ est linéaire.

(xiii) **Linéaire.**

- Soit $f, g \in C^0(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(f+g) &= (f+g)(1) + (f+g)(-1) \\ &= f(1) + g(1) + f(-1) + g(-1) \\ &= \varphi(f) + \varphi(g).\end{aligned}$$

- Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f) &= (\lambda f)(1) + (\lambda f)(-1) \\ &= \lambda f(1) + \lambda f(-1) \\ &= \lambda\varphi(f).\end{aligned}$$

Cela montre que φ est linéaire.

(xiv) **Non linéaire.** Si par exemple $f \in C^0(\mathbb{R})$ est la fonction constante $x \mapsto 1$, on a $f^2 = (-f)^2 = f$, donc

$$\varphi(-f) = (-f)^2 - 2f = -f \neq -3f = -(f^2 + 2f) = -\varphi(f).$$

(xv) **Non linéaire.** Si par exemple $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est la fonction constante $x \mapsto 1$, on a

$$\varphi(-f) = |(-f)(0)| = 1 \neq -1 = -f(0) = -\varphi(f).$$

(xvi) **Non linéaire.** Si par exemple $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est la fonction constante $x \mapsto 1$, on a

$$\varphi(-f) = \int_0^1 (-1)^2 \,dx = 1 \neq -1 = -\int_0^1 1^2 \,dx = -\varphi(f).$$

(xvii) **Linéaire.** On remarque déjà que l'application est bien définie car la dérivée n-ième d'une application de classe C^n est continue.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ l'assertion

$$\forall f, g \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}), (f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \quad \text{et} \quad \forall f \in C^n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence. Cela montrera en particulier que φ est linéaire.

Initalisation. L'énoncé pour $n = 0$ est immédiat (car la dérivée zéroïème d'une application est la fonction elle-même).

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Vérifions les deux parties de l'assertion $P(n+1)$.

- Soit $f, g \in C^{n+1}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
(f+g)^{(n+1)} &= \left((f+g)^{(n)}\right)' \\
&= \left(f^{(n)} + g^{(n)}\right)' && \text{d'après } P(n) \\
&= \left(f^{(n)}\right)' + \left(g^{(n)}\right)' \\
&= f^{(n+1)} + g^{(n+1)}.
\end{aligned}$$

- De même,

$$\begin{aligned}
(\lambda f)^{(n+1)} &= \left((\lambda f)^{(n)}\right)' \\
&= \left(\lambda f^{(n)}\right)' && \text{d'après } P(n) \\
\lambda \left(f^{(n)}\right)' \\
&= \lambda f^{(n+1)},
\end{aligned}$$

Cela achève la preuve de $P(n+1)$ et, partant, de la récurrence.

(xviii) **Linéaire.** Les applications $f \mapsto \lim\limits_{\pm\infty} f$ sont linéaires d'après le cours sur les limites. On conclut par stabilité par combinaison linéaire de $\mathcal{L}(C^0(\mathbb{R};\mathbb{C});\mathbb{C})$.

Autocorrection B.

Dans tous les cas, l'application est l'application linéaire canoniquement associée à une matrice, que l'on se contente de préciser. On donne ensuite le noyau et l'image de ladite application (ou de la matrice, c'est pareil).

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. On a $\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{im} A = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(ii) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et $\operatorname{im} A = \mathbb{R}^3$ (la matrice est inversible).

(iii) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a $\ker C = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \middle| \, z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{im} C = \mathbb{R}^2$.

(iv) $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a $\ker D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et $\operatorname{im} D = \mathbb{R}^2$ (la matrice est inversible).

Autocorrection C.

1. - Commençons par montrer que T_n est bien défini.
   Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
     - On a $\deg P' \leqslant \deg P \leqslant n$, donc $P' \in \mathbb{R}_n[X]$. En effectuant à nouveau le même raisonnement, on en déduit $P'' \in \mathbb{R}_n[X]$.
     - Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, $\omega^2 P \in \mathbb{R}_n[X]$.

   Par stabilité par combinaison linéaire, $P'' + \omega^2 P \in \mathbb{R}_n[X]$.

- ► Montrons que T_n est linéaire : soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} T_n(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)'' + \omega^2(\lambda P + Q) \\ &= \lambda P'' + Q'' + \lambda\, \omega^2\, P + \omega^2\, Q && \text{(linéarité de la dérivation)} \\ &= \lambda(P'' + \omega^2\, P) + (Q'' + \omega^2\, Q) \\ &= \lambda T_n(P) + T_n(Q). \end{aligned}$$

Cela montre que $T_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

2. On a
   - $T_n(1) = 0 + \omega^2 \times 1 = \omega^2$;
   - $T_n(X) = 0 + \omega^2\, X = \omega^2\, X$;
   - Pour tout $r \geqslant 2$, $T_n(X^r) = r(r-1)X^{r-2} + \omega^2 X^r = \omega^2 X^r + (r^2 - r)X^{r-2}$.

   En particulier, on voit que $\forall r \in [\![0, n]\!], \deg T_n(X^r) = r$: la famille $(T_n(1), T_n(X), \dots, T_n(X^r))$ est donc échelonnée au sens fort, ce qui montre qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   L'endomorphisme T_n envoie donc la base canonique sur une base de $\mathbb{R}_n[X]$, ce qui montre qu'il s'agit d'un automorphisme.

3. ► Le fait que T_n soit un automorphisme montre qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $T_n(P) = X^n$, et donc qu'il existe au moins une solution polynomiale (de degré $\leqslant n$) à l'équation différentielle.

   ► Par ailleurs, comme, pour tout $j < n$, l'application linéaire T_j est à valeurs dans $\mathbb{R}_j[X]$, ce qui montre que l'équation différentielle n'a pas de solution de degré $< n$.

   En particulier, le polynôme P obtenu au point précédent appartient à $\mathbb{R}_n[X] \setminus \mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est-à-dire que $\deg P = n$.

   ► Enfin, l'équation différentielle ne possède pas de solution polynomiale de degré $d > n$, car cela donnerait naissance à un polynôme Q de degré d (et donc $\neq P$) tel que $T_d(Q) = X^n$.

   On aurait donc $T_d(P) = T_d(Q)$, ce qui contredit l'injectivité de T_d.

   In fine, l'équation différentielle possède une unique solution polynomiale, qui est de degré n.

Autocorrection D.

- ► Supposons $f[E_1] \subseteq f[E_2]$.
  - Soit $x \in E_1$. Par hypothèse, il existe $x' \in E_2$ tel que $f(x) = f(x')$. On a donc $x - x' \in \ker f$, donc $x \in E_2 + \ker f$.
  - Tautologiquement, $\ker f \subseteq E_2 + \ker f$.

  Le sous-espace vectoriel $E_2 + \ker f$ contient donc à la fois E_1 et $\ker f$, donc il contient $E_1 + \ker f$.

- ► Supposons $E_1 + \ker f \subseteq E_2 + \ker f$.

  Soit $y \in f[E_1]$. On peut donc trouver $x \in E_1$ tel que $y = f(x)$. Par hypothèse, on peut trouver $x' \in E_2$ et $x_0 \in \ker f$ tels que $x = x' + x_0$. On a alors

$$y = f(x) = f(x') + f(x_0) = f(x') \in f[E_2],$$

  ce qui montre que $f[E_1] \subseteq f[E_2]$.

Autocorrection E.

1. ▶ Soit $u \in F \cap G$. Comme $u \in G = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$, on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$u = \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\3\lambda\end{pmatrix}.$$

L'appartenance de u à F se traduit en l'égalité

$$\lambda + \lambda - 3\lambda = 0, \quad \text{donc} \quad -\lambda = 0 \quad \text{donc} \quad \lambda = 0.$$

On a donc bien $u = 0$, et on a montré l'inclusion $F \cap G \subseteq \{0\}$. L'autre inclusion étant automatique, on a bien $F \cap G = \{0\}$, donc F et G sont bien en somme directe.

▶ Montrons $F + G = \mathbb{R}^3$. L'autre inclusion étant automatique, il suffit de prouver $\mathbb{R}^3 \subseteq F + G$.

Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Cherchons un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \in F$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \in F &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-\lambda\\y-\lambda\\z-3\lambda\end{pmatrix} \in F \\
&\Leftrightarrow (x-\lambda) + (y-\lambda) - (z-3\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow x + y - z + \lambda = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda = -x - y + z.
\end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $\lambda = -x - y + z$, on a $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \in F$, donc

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\lambda \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}}_{\in G} \in F + G.$$

On a donc bien montré

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G.$$

2. En suivant le raisonnement de la première question, on obtient $\lambda = -1$ puis la décomposition

$$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{-\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}}_{\in G},$$

donc la projection de $\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ sur F parallèlement à G est $\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$.

3. On raisonne comme à la question précédente : on trouve $\lambda = 1$ puis la décomposition

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in G},$$

donc la projection de $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur G parallèlement à F est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Autocorrection F.

1. Il s'agit de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
2. On a $A^2 = 9I_3$, donc $f^2 = \varphi_A^2 = \varphi_{A^2} = \varphi_{9I_3} = 9\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.
3. D'après la question précédente, $\left(\frac{1}{3}f\right)^2 = \frac{1}{9}f^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

   D'après la caractérisation des symétries, $\frac{1}{3}f$ est donc une symétrie.
4. L'application $s = \frac{1}{3}f$ est un automorphisme (c'est une symétrie), donc f qui est la composée de s et de l'homothétie $3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ en est également un.
   L'égalité $f^2 = 9\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ montre directement que

   $$f \circ \left(\frac{1}{9}f\right) = \left(\frac{1}{9}f\right) \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3},$$

   donc

   $$f^{-1} = \frac{1}{9}f.$$