Applications linéaires

Exemples

Autocorrection A.

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

(i) $\begin{cases} K^2 \to K \\ (x,y) \mapsto xy \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} K^2 \to K^3 \\ (x,y) \mapsto (1+x, 2x, y) \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} K^3 \to K^2 \\ (x,y,z) \mapsto (x-3z, 2x+y) \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x+1 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$

(vi) $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$

(vii) $\begin{cases} \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \\ (x,y) \mapsto x^2 - y^2 \end{cases}$

(viii) $\begin{cases} K^3 \to K^3 \\ (x,y,z) \mapsto (y, x, x+y) \end{cases}$

(ix) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \min(x,y) \end{cases}$

(x) $\begin{cases} K[X] \to K[X] \\ P \mapsto P(X^2) \end{cases}$

(xi) $\begin{cases} K[X] \to K[X] \\ P \mapsto P(X)^2 \end{cases}$

(xii) $\begin{cases} C^2(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}) \\ f \mapsto f'' - 2f' + f \end{cases}$

(xiii) $\begin{cases} C^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(1) + f(-1) \end{cases}$

(xiv) $\begin{cases} C^0(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}) \\ f \mapsto f^2 + 2f \end{cases}$

(xv) $\begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \\ f \mapsto |f(0)| \end{cases}$

(xvi) $\begin{cases} C^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f^2 \end{cases}$

(xvii) $\begin{cases} C^n(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}) \\ f \mapsto f^{(n)} \end{cases}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$)

(xviii) $\begin{cases} \left\{ f \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{C}) \,\middle|\, f \text{ converge en } \pm\infty \right\} \to \mathbb{C} \\ f \mapsto \lim\limits_{+\infty} f - \lim\limits_{-\infty} f. \end{cases}$

Exercice 1.

1. Déterminer toutes les applications K-linéaires $K \to K$.
2. Plus généralement, montrer que $\mathcal{L}(K^p, K^n) = \{\varphi_A \mid A \in M_{n,p}(K)\}$, où φ_A désigne l'application linéaire canoniquement associée à A.
3. En déduire que les espaces vectoriels $\mathcal{L}(K^p, K^n)$ et $M_{n,p}(K)$ sont isomorphes.
4. Montrer qu'il existe un isomorphisme (de K-espaces vectoriels) $M_n(K) \to \mathcal{L}(K^n)$ qui est également un isomorphisme d'anneaux. On parle alors *d'isomorphisme de* K-*algèbres*.
5. En déduire que les groupes $GL_n(K)$ et $GL(K^n)$ sont isomorphes.

Exercice 2.
Soit $E=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,\middle|\,u_0=0\right\}$ et

$$\Delta:\begin{cases} E & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,. \end{cases}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et que Δ est un isomorphisme.

Exercice 3.
Soit $a\in K$.

Montrer que $E_a=\{P\in K[X]\,|\,P(a)=0\}$ est un sous-espace vectoriel de K[X], isomorphe à K[X].

Exercice 4.
Soit E un espace vectoriel et $f,g\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f\circ g-g\circ f=f$. Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}, f^n\circ g-g\circ f^n=n\,f^n.$$

Exercice 5^+.
Soit E un espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$. On dit que f est *nilpotent* si $\exists n\in\mathbb{N}^*: f^n=0$.

Montrer que dans ce cas, id_E-f est un automorphisme et donner une expression de son inverse.

Noyaux et images, injectivité, surjectivité

Exemples

Autocorrection B.
Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer leurs noyaux et images.

(i) $\begin{cases}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (x+2y,-2x-4y)\end{cases}$

(ii) $\begin{cases}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \mapsto & (x,2x-z,x-y+z)\end{cases}$

(iii) $\begin{cases}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y,x+2z)\end{cases}$

(iv) $\begin{cases}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (x-2y,x+2y).\end{cases}$

Autocorrection C.
Soit $n\geqslant 1$ un entier et $\omega\in\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que

$$T_n:\begin{cases}\mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X]\\ P & \mapsto & P''+\omega^2 P\end{cases}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. En calculant $T_n(1), T_n(X), T_n(X^2),\ldots,T_n(X^n)$, montrer que T_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que l'équation différentielle $y''+\omega^2y=x^n$ possède une unique solution polynomiale, dont on déterminera le degré.

Exercice 6.

Soit K un corps de caractéristique nulle.

1. Montrer que
$$\Delta : \begin{cases} K[X] \to K[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$
est un endomorphisme de $K[X]$.
2. Montrer que $\ker \Delta = K_0[X]$.
3. En calculant l'image par Δ de la base canonique, déterminer $\operatorname{im} \Delta$.
4. Trouver un sous-espace vectoriel E de $K[X]$ tel que Δ induise un isomorphisme $E \to K[X]$.

Exercice 7.

Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(2X) - P(X) \end{cases}$ est linéaire et déterminer son noyau et son image.

Exercice 8.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner une base de $\ker u$, $\ker(u - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\ker(u + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
2. En déduire $\ker u \oplus \ker(u - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(u + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$.
3. Montrer que $E = \ker(u - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(u + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est stable sous u et que u induit un automorphisme de E.

Exercice 9^{++}.

1. Existe-t-il $T \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}))$ tel que $T \circ T$ soit l'opérateur de dérivation D ?
2. Même question pour $C^\infty(\mathbb{R}^*)$.

Plus formel

Autocorrection D.

Soit E et F deux espaces vectoriels, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Montrer que $f[E_1] \subseteq f[E_2]$ si et seulement si $E_1 + \ker f \subseteq E_2 + \ker f$.

Exercice 10.

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont stables par g.

Exercice 11.

Soit E, F et G trois espaces vectoriels et $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$.

Montrer que $g \circ f$ est nulle si et seulement si $\operatorname{im} f \subseteq \ker g$.

Exercice 12.

Soit E, F et G trois espaces vectoriels et $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que l'on a $\ker(f) \subseteq \ker(g \circ f)$ et que
$$\ker(f) = \ker(g \circ f) \Leftrightarrow \mathrm{im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}.$$
2. Montrer que l'on a $\mathrm{im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{im}(g)$ et que
$$\mathrm{im}(g \circ f) = \mathrm{im}(g) \Leftrightarrow \mathrm{im}(f) + \ker(g) = F.$$
3. Comment exprimer en général $\ker(g \circ f)$ en fonction de f et $\ker g$?
De même, comment exprimer $\mathrm{im}(g \circ f)$ en fonction de g et $\mathrm{im}\, f$?

Exercice 13.

Soit E un espace vectoriel, $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Exprimer $f^{-1}[f[F]]$ en fonction de F et $\ker f$.
2. Exprimer $f\left[f^{-1}[F]\right]$ en fonction de F et $\mathrm{im}\, f$.
3. À quelle condition a-t-on $f\left[f^{-1}[F]\right] = f^{-1}[f[F]]$?

Exercice 14. ☑

Soit E, F deux espaces vectoriels, S_1, S_2 deux sous-espaces vectoriels de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que $u[S_1 + S_2] = u[S_1] + u[S_2]$.
2. On suppose u injective et S_1 et S_2 en somme directe. Montrer que $u[S_1 \oplus S_2] = u[S_1] \oplus u[S_2]$.
3. Montrer que l'on ne peut pas se passer de l'hypothèse d'injectivité dans la question précédente.

Exercice 15. ☑

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que si $\mathrm{im}(f + g) = \mathrm{im}\, f \oplus \mathrm{im}\, g$, alors $E = \ker f + \ker g$.

Exercice 16. ☑

Soit E un K-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, K)$.

1. Montrer que si l'application linéaire f n'est pas nulle, elle est surjective.
2. On suppose f non nulle et on fixe $u_0 \in E$ tel que $f(u_0) \neq 0$. Montrer que $E = \ker f \oplus \mathrm{Vect}(u_0)$.
3. On note $\mathfrak{sl}_n(K) = \{M \in M_n(K) \mid \mathrm{tr}\, M = 0\}$. A-t-on $M_n(K) = \mathfrak{sl}_n(K) \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$?

Exercice 17. ☑

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, K)$ deux applications linéaires non nulles.

Montrer que $\exists \lambda \in K : g = \lambda f$ si et seulement si $\ker f = \ker g$.

Exercice 18.

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^7 = f$. Montrer que
$$E = \ker f \oplus \mathrm{im}\, f.$$

Exercice 19 (Lemme des noyaux dans le cas quadratique). ☑
Soit E un espace vectoriel, $\alpha \neq \beta$ deux scalaires et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) \circ (f - \beta\,\mathrm{id}_E) = 0. \tag{✠}$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que $a(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) + b(f - \beta\,\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E$.
2. En déduire que $E = \mathrm{im}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) + \mathrm{im}(f - \beta\,\mathrm{id}_E)$.
3. Déduire de (✠) que $\mathrm{im}(f - \beta\,\mathrm{id}_E) \subseteq \ker(f - \alpha\,\mathrm{id}_E)$ et que $\mathrm{im}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) \subseteq \ker(f - \beta\,\mathrm{id}_E)$.
4. Montrer que $E = \ker(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) \oplus \ker(f - \beta\,\mathrm{id}_E)$.

Exercice 20$^+$.
Soit E et F des espaces vectoriels tels que $E = G \oplus H$. Soit $A = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid G \subseteq \ker u\}$.

Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel isomorphe à $\mathcal{L}(H, F)$.

Exercice 21$^+$.
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E.

Pour toute application $f \in \mathcal{L}(F, G)$, on considère $V_f = \{x + f(x) \mid x \in F\}$.

1. Soit S un supplémentaire de F. Montrer que $\forall x \in F, \exists! y \in G : x + y \in S$.
2. Montrer que tout supplémentaire de F est de la forme V_f, pour un unique $f \in \mathcal{L}(F, G)$.
3. En déduire que tous les supplémentaires de F sont isomorphes.

L'exercice le plus classique de l'univers

Exercice 22$^+$ (Caractérisation des homothéties). 💡☑
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que, pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $u(x)$ soient colinéaires.

Montrer que u est une homothétie.

Projecteurs et symétries

Autocorrection E. ☑
Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y - z = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1, 1, 3))$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Déterminer la projection sur F parallèlement à G de $(2, 2, 3)$.
3. Déterminer la projection sur G parallèlement à F de $(1, -2, 0)$.

Autocorrection F. ☑
Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + 2y \\ 4x - y \\ -2x + 2y + 3z \end{pmatrix} \end{array}\right.$.

1. Identifier la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que f soit canoniquement associée à A.
2. Calculer A^2 et en déduire f^2.
3. Montrer que $\dfrac{1}{3}f$ est une symétrie.
4. En déduire que $f \in GL(\mathbb{R}^3)$ et exprimer f^{-1} en fonction de f.

Exercice 23.

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes.

1. On suppose que g est un projecteur et que $\ker g$ et $\operatorname{im} g$ sont stables sous f.
   Montrer que f et g commutent.
2. Donner un contre-exemple à la question précédente si on ne suppose plus que g est un projecteur.

Exercice 24.

Soit E un espace vectoriel et $S_1, S_2 \subseteq E$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. On note p_1 (resp. p_2) le projecteur sur S_1 (resp. S_2) parallèlement à S_2 (resp. S_1) et s_1 (resp. s_2) la symétrie d'axe S_1 parallèlement à S_2 (resp. S_1). Montrer les égalités suivantes.

(i) $p_1 + p_2 = \mathrm{id}_E$;

(ii) $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$;

(iii) $s_1 + s_2 = 0$;

(iv) $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1 = -\mathrm{id}_E$.

Exercice 25.

Soit E un espace vectoriel sur un corps de caractéristique différente de 2 et p, q deux projecteurs de E.

1. Montrer que si p et q commutent, alors pq est un projecteur de E.
2. Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $pq = qp = 0$ et que dans ce cas, on a $\operatorname{im}(p+q) = \operatorname{im} p \oplus \operatorname{im} q$ et $\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q$.

Exercice 26.

Soit E un espace vectoriel et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes tels que $p + q = \mathrm{id}_E$ et $pq = 0$.

1. Montrer que p et q sont des projecteurs et que $qp = 0$.
2. Montrer que $\operatorname{im} p = \ker q$ et $\operatorname{im} q = \ker p$.

Exercice 27^{+}. ☑

Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E sur un corps de caractéristique différente de 2.

1. Montrer que si $pq + qp = 0$, alors $pq = qp = 0$.
2. En déduire que $p - q$ est un projecteur si et seulement si $pq = qp = q$.

Exercice 28. ☑

Soit p et q des projecteurs de E tels que $pq = 0$. On note $r = p + q - qp$.

1. Montrer que r est un projecteur.
2. Montrer que $\operatorname{im} p$ et $\operatorname{im} q$ sont en somme directe, puis que $F = \operatorname{im} p \oplus \operatorname{im} q$ et $G = \ker p \cap \ker q$ sont supplémentaires.
3. Montrer que r est le projecteur sur F parallèlement à G.

Exercice 29^{++}.

Soit u et v deux symétries d'un espace vectoriel réel E.

1. Montrer que $\ker(uv - vu) = \ker(u+v) \oplus \ker(u-v)$.
2. Montrer que $\operatorname{im}(uv - vu) = \operatorname{im}(u+v) \cap \operatorname{im}(u-v)$.

Vecteurs propres, valeurs propres

Exercice 30.

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit *diagonalisable* si et seulement s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de E.

1. Montrer que si u est diagonalisable, $E = \ker u \oplus \operatorname{im} u$.
2. Soit $A \in M_n(K)$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si φ_A est diagonalisable.

Exercice 31.

Que dire d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dont tous les vecteurs non nuls de E seraient vecteurs propres ?

Mélange

Exercice 32$^+$.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes tels que $u \circ v = v \circ u$ et $\ker u \cap \ker v = \{0_E\}$.

Montrer que $\forall i, j \in \mathbb{N}, \ker(u^i) \cap \ker(v^j) = \{0\}$.

Exercice 33$^+$ (Théorème de Maschke).

Soit K un corps de caractéristique nulle, E un K-espace vectoriel et G un sous-groupe fini de $GL(E)$.

On considère un sous-espace vectoriel F de E, *stable sous* G (c'est-à-dire tel que $\forall g \in G, g[F] \subseteq F$) et un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ dont l'image est F.

On pose enfin $\pi = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g \in G} g^{-1} \circ p \circ g$.

1. Montrer que π est un projecteur d'image F, et que $\forall h \in G, \pi \circ h = h \circ \pi$.
2. En déduire que F a un supplémentaire stable sous G.

3^{++}. Montrer que le résultat tombe en défaut si l'on ne suppose plus K de caractéristique nulle, ou si l'on ne suppose plus G fini.

Exercice 34$^+$ (Pseudo-inverse d'Azumaya-Drazin).

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que $g \in \mathcal{L}(E)$ est un *pseudo-inverse* de f si $f \circ g = g \circ f$, $f \circ g \circ f = f$, et $g \circ f \circ g = g$.

L'endomorphisme f est dit *pseudo-inversible* s'il admet un pseudo-inverse.

1. Montrer que si f est pseudo-inversible, il admet un unique pseudo-inverse. On le notera $f^\sharp$.
2. Montrer que si f est inversible (resp. est un projecteur), alors il est pseudo-inversible, et déterminer son pseudo-inverse $f^\sharp$.
3. Plus généralement, on suppose $\ker f \oplus \operatorname{im} f = E$. Montrer que f est pseudo-inversible.
4. Le but de cette question est de montrer la réciproque de la question précédente.
   On suppose f pseudo-inversible.
   (a) Montrer que $f \circ f^\sharp$ est un projecteur, de noyau $\ker f^\sharp$ et d'image $\operatorname{im} f$. Qu'en déduit-on ?
   (b) Montrer que $E = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.
5. Montrer que f est pseudo-inversible si et seulement si $\ker(f) = \ker(f^2)$ et $\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2)$.

Exercice 35^{++}.
Soit $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que pour toute suite u, $\varphi(u)$ soit une valeur prise par u.

Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi = \text{év}_n : u \mapsto u_n$.

Exercice 36.
Soit A et B deux K-algèbres. Un *morphisme de* K-*algèbres* $\varphi : A \to B$ est un morphisme d'anneaux qui est également une application K-linéaire.

1. Déterminer tous les morphismes de K-algèbres $K \to B$.
2. Montrer que les morphismes de K-algèbres $K[X] \to B$ sont en bijection avec les éléments de B.