

---

## Dimension

---

### Généralités

#### Autocorrection A. ✓

1. Donner une base de  $\text{Vect}((1, -1, 1), (0, -1, 2), (1, -2, 3))$ .
2. En déduire que  $\text{Vect}((1, -1, 1), (0, -1, 2), (1, -2, 3)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ .

#### Autocorrection B. ✓

Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On définit  $D_t = \text{Vect}(t, t, 1)$  et  $P_t = \text{Vect}((1, t, 1), (2, 1, 1))$ .

1. Montrer que  $D_t$  et  $P_t$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ , dont on précisera la dimension.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $t \in \mathbb{R}$  pour que l'on ait  $D_t \oplus P_t = \mathbb{R}^3$ .

#### Exercice 1. ✓

Donner une base et la dimension des espaces vectoriels suivants.

- (i)  $E = \text{Vect}((1, 2, 1, 0), (4, -2, 1, 1), (7, 2, 4, 2), (11, 4, 1, 3))$ ;
- (ii)  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y - z + 2t = 0 \text{ et } 3y - 2z + t = 0\}$ .

#### Exercice 2. ✓

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille génératrice de  $\mathbb{K}^n$ . Montrer que  $(e_2, \dots, e_n)$  est libre.

#### Exercice 3. ✓

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on définit

$$u_k = (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n.$$

Montrer que  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ .

## Espaces de suites, de matrices et de polynômes

#### Exercice 4. ✓

Soit  $n \geq 1$ . Rappeler la dimension de  $M_n(\mathbb{K})$ . Déterminer les dimensions :

- (i) de l'espace  $D_n(\mathbb{K})$  des matrices diagonales ;
- (ii) de l'espace  $T_n^+(\mathbb{K})$  des matrices triangulaires supérieures ;
- (iii) de l'espace  $T_n^-(\mathbb{K})$  des matrices triangulaires inférieures ;
- (iv) de l'espace  $S_n(\mathbb{K})$  des matrices symétriques ;
- (v) de l'espace  $A_n(\mathbb{K})$  des matrices antisymétriques ;
- (vi) de l'espace  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \ker \text{tr}$ .

**Exercice 5<sup>+</sup>.** 💡  
 Une matrice  $M \in M_n(\mathbb{R})$  est dite *magique* s'il existe un nombre réel  $m$  tel que la somme des coefficients de  $M$  présents sur chaque ligne et sur chaque colonne vaut  $m$ .

Montrer que l'ensemble  $\mathcal{M}$  des matrices magiques est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{K})$ , et déterminer sa dimension.

**Exercice 6.** 💡  
 Soit  $T \in \mathbb{N}^*$ . On définit l'espace des suites  $T$ -périodiques  $\mathcal{P}_T = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+T} = u_n \right\}$

et on note  $\mathcal{P} = \bigcup_{T \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}_T$ .

1. Montrer que  $\mathcal{P}_T$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et déterminer  $\dim \mathcal{P}_T$ .
2. Montrer que  $((\omega^n)_{n \in \mathbb{N}})_{\omega \in \mathbb{U}_T}$  est une base de  $\mathcal{P}_T$ .
3. Montrer que  $\mathcal{P}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et en déterminer une base.

**Exercice 7<sup>+</sup>.** \_\_\_\_\_

1. On considère un polynôme  $P = X^2 + \alpha X + \beta$  admettant deux racines  $\rho \neq \sigma \in \mathbb{K}$  et on pose

$$\mathcal{R} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0\}.$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est un plan vectoriel, puis en déduire que  $((\rho^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\sigma^n)_{n \in \mathbb{N}})$  est une base de  $\mathcal{R}$ .

2. Soit  $X^k + \alpha_{k-1}X^{k-1} + \dots + \alpha_1X + \alpha_0 \in K[X]$  un polynôme possédant  $k$  racines distinctes  $\rho_1, \dots, \rho_n$ . En généralisant le raisonnement de la question précédente, montrer que

$$\mathcal{R}' = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} + \alpha_{k-1}u_{n+k-1} + \dots + \alpha_1u_{n+1} + \alpha_0u_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  de dimension  $k$  et en exhiber une base.

## Sous-espaces vectoriels

**Autocorrection C.** \_\_\_\_\_ ✓

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{P} = \{P \in K_{2n}[X] \mid P(-X) = P(X)\}$  et  $\mathcal{J} = \{P \in K_{2n}[X] \mid P(-X) = -P(X)\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{J}$  sont des sous-espaces vectoriels de  $K_{2n}[X]$ .
2. Montrer que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{J}$  sont en somme directe.
3. En exhibant des familles libres explicites, montrer que  $\dim \mathcal{P} \geq n + 1$  et  $\dim \mathcal{J} \geq n$ .
4. En faisant le moins de calculs possibles, montrer que les inégalités de la question précédente sont des égalités, et en déduire une base de  $\mathcal{P}$ , une base de  $\mathcal{J}$ , et une démonstration du fait que  $K_{2n}[X] = \mathcal{P} \oplus \mathcal{J}$ .

**Exercice 8.** \_\_\_\_\_

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in E$ .

On suppose la famille  $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$  libre. En déduire que  $\text{rg}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \geq n$ .

**Exercice 9.** ✓

1. Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $K^n$ . Montrer qu'il existe une sous-famille  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$  de la base canonique telle que  $E$  et  $\text{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$  soient supplémentaires.
2. Déterminer un supplémentaire de  $\left\{ (x, y, z, t) \in K^4 \mid \begin{array}{l} x - y - z + t = 0 \\ y - 2z + t = 0 \end{array} \right\}$ .

**Exercice 10.** ✓

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $\dim F + \dim G > \dim E$ , alors  $F$  et  $G$  ne peuvent pas être en somme directe.
2. Soit  $F, G$  et  $H$  trois sous-espaces vectoriels de  $E$ . Donner une condition sur  $\dim F + \dim G + \dim H$  garantissant que l'intersection  $F \cap G \cap H$  soit non triviale.

**Exercice 11.** ✓

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ .

1. Soit  $H$  et  $H'$  deux hyperplans de  $E$ . Montrer que  $\dim(H \cap H') \in \{n-1, n-2\}$ , et déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que  $\dim(H \cap H') = n-2$ .
2. Quelle est la dimension de

$$\left\{ (a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in \mathbb{R}^9 \mid \begin{array}{l} a - 7b + 3c - 2d + f - g + \sqrt{2}h + 42i = 0 \\ a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f + 7g + 8h + 9i = 0 \end{array} \right\} ?$$

3. Soit  $H_1, \dots, H_r$  des hyperplans de  $E$ . Montrer que

$$\dim \left( \bigcap_{i=1}^r H_i \right) \geq n - r.$$

4. Soit  $v = (2, 1, -1, 0) \in \mathbb{R}^4$  et  $D = \text{Vect}(v)$ . Écrire  $D$  comme l'intersection de trois hyperplans.

**Exercice 12.** ✓

Montrer que deux supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel sont isomorphes.

**Exercice 13.** ✓

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $F, G \subseteq E$  deux espaces en somme directe.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel  $\hat{F} \supseteq F$  de  $E$  tel que  $\hat{F} \oplus G = E$ .

**Exercice 14<sup>+</sup>.** 💡

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $p, q \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Quelles sont les dimensions possibles pour une intersection  $F \cap G$ , quand  $F$  (resp.  $G$ ) est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $p$  (resp.  $q$ ) ?

**Exercice 15<sup>+</sup> (Lemme de l'échange de Steinitz).** ✓

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $(f_1, \dots, f_m)$  une famille génératrice de  $E$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille libre de  $E$ . Pour  $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on définit l'assertion  $P(r)$  :

« il existe des indices  $i_1, \dots, i_r$  tous distincts telle que la famille obtenue à partir de  $(f_1, \dots, f_m)$  en remplaçant chacun des  $f_{i_k}$  par  $e_k$  est génératrice. »

1. Montrer par récurrence l'assertion  $\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(r)$ .
2. Constater que ce résultat redémontre le lemme d'échange de Steinitz, et explique mieux son nom.

## Applications linéaires (et théorème du rang)

### Autocorrection D.



Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}^4 & \rightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (x - z, y - t) \end{cases}$$

1. Montrer que  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^4, \mathbb{K}^2)$ .
2. Donner une base et la dimension de  $\ker f$ .
3. En déduire que  $f$  est surjective.
4. Soit  $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid y = z = 0\}$ .  
Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^4$ , dont on précisera la dimension.
5. Montrer que  $\ker f$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbb{K}^4$ .

### Exercice 16.



Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^3 = \text{id}_E$ .

1. Montrer  $\text{im}(f - \text{id}_E) \subseteq \ker(f^2 + f + \text{id}_E)$ ;
2. Montrer que  $\text{im}(f - \text{id}_E)$  et  $\ker(f - \text{id}_E)$  sont supplémentaires.

### Exercice 17.



Soit  $E$  un espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que  $E = \ker u \oplus \text{im } u$  si et seulement si  $\text{im } u^2 = \text{im } u$  et  $\ker u^2 = \ker u$ .
2. On suppose  $E$  de dimension finie, montrer que

$$E = \ker u \oplus \text{im } u \Leftrightarrow \text{im } u^2 = \text{im } u \Leftrightarrow \ker u^2 = \ker u.$$

3. L'équivalence  $\text{im } u^2 = \text{im } u \Leftrightarrow \ker u^2 = \ker u$  est-elle valable en dimension infinie ?

### Exercice 18.

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ .

1. On suppose que  $\ker u + \ker v = \text{im } u + \text{im } v = E$ . Montrer que les deux sommes sont directes.
2. Montrer par un contre-exemple que la question précédente cesse d'être vraie si l'on ne suppose plus  $E$  de dimension finie.

### Exercice 19.



Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P_n \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P_n - P'_n = X^n$ .

### Exercice 20.



Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. Soit  $V \subseteq E$  un sous-espace vectoriel. Montrer que

$$\dim u[V] = \dim V - \dim(V \cap \ker u).$$

2. Soit  $W \subseteq F$  un sous-espace vectoriel. Montrer que

$$\dim u^{-1}[W] = \dim(W \cap \text{im } u) + \dim \ker u.$$

**Exercice 21.**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Montrer qu'il existe un espace vectoriel  $E'$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E', E)$  tel que  $F = \text{im } \varphi$ .

2. Soit  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Montrer qu'il existe un espace vectoriel  $E''$  et  $\psi \in \mathcal{L}(E, E'')$  tel que  $G = \text{ker } \psi$ .

3. Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

À quelle condition existe-t-il  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $F = \text{im } u$  et  $G = \text{ker } u$  ?

**Exercice 22.**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  non nul. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i)  $u^2 = 0$ ;

(ii) il existe un projecteur  $p$  de  $E$  tel que  $pu = u$  et  $up = 0$ ;

(iii) il existe un projecteur  $p$  de  $E$  tel que  $pu - up = u$ .

**Exercice 23<sup>+</sup> (Lemme de factorisation).**

Soit  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $v \in \mathcal{L}(E, G)$ .

Le but de l'exercice est de démontrer que

$$\text{ker } u \subseteq \text{ker } v \Leftrightarrow (\exists w \in \mathcal{L}(F, G) : v = w \circ u).$$

1. On suppose qu'il existe  $w \in \mathcal{L}(F, G)$  telle que  $v = w \circ u$ . Montrer que  $\text{ker } u \subseteq \text{ker } v$ .

2. En considérant un supplémentaire  $S$  de  $\text{ker } u$  dans  $E$  et un supplémentaire  $T$  de  $\text{im } u$  dans  $F$ , construire une application linéaire  $w \in \mathcal{L}(F, G)$  telle que  $v = w \circ u$ .

**Exercice 24<sup>+</sup>.**

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$  tel que

$$\forall x \in V, f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

Montrer que  $f$  est combinaison linéaire des  $f_1, \dots, f_n$ .

**Exercice 25<sup>+</sup>.**

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que

$$\text{im } f = \text{ker } f \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } \exists h \in \mathcal{L}(E) : hf + fh = \text{id}).$$

**Exercice 26.**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\forall v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u$ .

Montrer que  $u$  est une homothétie.

**Exercice 27<sup>++</sup>.**

---

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

On dit que deux  $r$ -uplets  $(F_1, \dots, F_r)$  et  $(F'_1, \dots, F'_r)$  de sous-espaces vectoriels de  $E$  sont *équivalents* s'il existe un automorphisme  $\varphi \in GL(E)$  tel que  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \varphi[F_i] = F'_i$ .

1. Classer les sous-espaces vectoriels de  $E$  à équivalence près.
2. Classer les couples de sous-espaces vectoriels de  $E$  à équivalence près.
3. On suppose pour simplifier que  $E$  est de dimension paire, et on note  $r = \frac{1}{2} \dim E$ .

Montrer que les triplets de sous-espaces vectoriels  $(F_1, F_2, F_3)$  tels que  $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \dim F_i = r$  et  $\forall i \neq j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, F_i \cap F_j = \{0_E\}$  sont tous équivalents entre eux.

4. On suppose toujours  $\dim E = 2r$ . Montrer qu'il existe une infinité de quadruplets de sous-espaces vectoriels  $(F_1, F_2, F_3, F_4)$  tels que  $\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \dim F_i = r$  et  $\forall i \neq j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, F_i \cap F_j = \{0_E\}$  deux à deux non équivalents.

### Inégalités sur le rang et la dimension

**Exercice 28.**

---

Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille de vecteurs d'un espace vectoriel  $E$ . Soit  $p \leq q$  deux éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Montrer  $0 \leq \operatorname{rg}(u_1, \dots, u_q) - \operatorname{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq q - p$ .

**Exercice 29.**

---

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $a, b \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que

$$\dim \ker(a \circ b) \leq \dim \ker a + \dim \ker b.$$

**Exercice 30.**

---

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $r, s \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Déterminer

$$\mathcal{R}(r, s) = \left\{ \operatorname{rg}(g \circ f) \mid (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \operatorname{rg} f = r \text{ et } \operatorname{rg} g = s \right\}.$$

**Exercice 31<sup>++</sup> (Inégalité de Frobenius).**

---

Soit  $u, v$  et  $w$  trois endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ . Montrer

$$\operatorname{rg}(uv) + \operatorname{rg}(vw) \leq \operatorname{rg}(v) + \operatorname{rg}(uvw).$$

### Un peu de dimension infinie

**Exercice 32.**

---

Construire un isomorphisme  $K[X] \rightarrow K \times K[X]$ , et en déduire une nouvelle preuve du fait que  $K[X]$  n'est pas de dimension finie.

**Exercice 33.**

---

Montrer que  $C^0(\mathbb{R})$  est de dimension infinie.

**Exercice 34<sup>++</sup>.** \_\_\_\_\_ 

On admet dans cet exercice qu'il n'existe pas de surjection de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Soit  $K$  un corps quelconque et  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension infinie.

Montrer qu'il existe une suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'hyperplans de  $E$  telle que  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ .

2. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Montrer qu'il n'existe pas de suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'hyperplans de  $E$  telle que  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ .

**Exercice 35<sup>+++</sup>.** \_\_\_\_\_ 

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel.

Montrer que  $E$  est isomorphe à  $E^*$  si et seulement si  $E$  est de dimension finie.

## Mélange

**Exercice 36.** \_\_\_\_\_

Soit  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels de dimension finie. Soit  $a \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $b \in \mathcal{L}(F, G)$ .

Montrer que si  $\text{rg } a + \text{rg } b < \dim E$ , il existe  $x \in E$  non nul tel que  $a(x) = 0$  et  $b(x) = 0$ .

**Exercice 37.** \_\_\_\_\_  

Soit  $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ . Montrer sans calcul qu'on peut trouver un triplet non nul de réels  $(\lambda, \mu, \nu)$  tel que la matrice  $\lambda A + \mu B + \nu C$  soit triangulaire supérieure et de trace nulle.

**Exercice 38.** \_\_\_\_\_

1. Soit  $J = \sum_{i=1}^n E_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(K).$

Déterminer le rang, le noyau et l'image de la matrice  $J$ , ainsi que l'endomorphisme associé à  $J$  dans la base canonique de  $K_n[X]$ .

2. On suppose par l'absurde qu'il existe  $M \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $M^2 = J$ .

(a) Déterminer le rang, l'image et le noyau de  $M$ .

(b) Montrer que  $\ker M$  et  $\text{im } M$  ne sont pas en somme directe, et aboutir à une contradiction.

**Exercice 39.** \_\_\_\_\_ 

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Montrer que les  $F_i, i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  sont en somme directe si et seulement si  $\dim \left( \sum_{i=1}^p F_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim F_i$ .

**Exercice 40.**

---

1. Soit  $E \subseteq \mathbb{R}^{[0,1]}$  un espace vectoriel constitué de fonctions monotones. Montrer que  $\dim E \leq 2$ .
2. Même question pour  $E \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

**Exercice 41.**

Soit  $(f_1, \dots, f_n)$  une famille libre de fonctions dérivables  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Montrer  $\text{rg}(f'_1, \dots, f'_n) \geq n - 1$ .

**Exercice 42.**

Soit  $K$  un corps fini. Montrer qu'il existe un nombre premier  $p$  et un entier  $n \geq 1$  tel que  $|K| = p^n$ .