Représentation matricielle des applications linéaires

Exercice 7.

Dans la première question, pour le sens direct, il s'agit de construire un endomorphisme f possédant la propriété $\ker f = \operatorname{im} f$.

Une bonne première étape est de construire une matrice $A \in M_2(K)$ telle que $\ker A = \operatorname{im} A$, afin de s'en servir de « brique de base » dans la construction de f.

Exercice 34.

Le cours ne répond pas directement à la question, mais il permet de voir qu'une application linéaire donnée ne peut pas se factoriser à travers un espace vectoriel « trop petit ».

Autocorrection

Autocorrection A.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. On vérifie par récurrence que $\forall n \geqslant 1, A^n = \begin{pmatrix} 1 & -(n-1) & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. On en déduit que pour $n \geqslant 1$, $f^n : (x, y, z) \mapsto (x - (n-1)y - z, y, y)$.

Autocorrection B.

1. La matrice A est triangulaire supérieure, avec des coefficients diagonaux non nuls, donc elle est inversible.
   On peut l'inverser par la méthode des bimatrices :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad [L_2 \leftarrow L_1 - L_2]$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \begin{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{bmatrix}$$
   donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. On vérifie que
$$\operatorname{Mat}_{(1,X,X^2)}(\Delta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que Δ est un automorphisme, et que son inverse vérifie

$$\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(\Delta^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, l'équation $\Delta(P) = 1 + X + 2X^2$ a une unique solution (car Δ est bijective), à savoir le polynôme $\Delta^{-1}(1 + X + 2X^2)$, dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}\left(\Delta^{-1}(1 + X + 2X^2)\right) &= \mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}\left(\Delta^{-1}\right)\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}\left(1 + X + 2X^2\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc

$$\Delta^{-1}\left(1 + X + 2X^2\right) = 4 - 3X + 2X^2.$$

Autocorrection C.

1. Notons $\mathfrak{can}_4$ et $\mathfrak{can}_3$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$. On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathfrak{can}_4}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathfrak{can}_3}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On sait alors que $\mathrm{rg}(\mathcal{B}) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathfrak{can}_4}(\mathcal{B})\right)$, donc il suffit de montrer que cette matrice est de rang 4 (c'est-à-dire inversible) pour en conclure que $\mathcal{B}$ est une base, et de même pour l'autre matrice. On peut faire cela sans difficulté.

2. Pour déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \\ \xi \end{pmatrix}$, on peut résoudre le système

$$\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \nu + \xi = 1 \\ \nu = -2 \\ \mu + \nu = 5 \\ \mu + \nu + \xi = 6. \end{cases}$$

ou calculer le produit

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}_{\mathfrak{can}_4 \to \mathcal{B}}\,\mathrm{Mat}_{\mathfrak{can}_4}(u) = P^{-1}_{\mathfrak{can}_4 \to \mathcal{B}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

en inversant la matrice $P_{\mathfrak{can}_4 \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On trouve de toute façon $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $P_{\mathcal{B} \to \mathfrak{can}_4} = P^{-1}_{\mathfrak{can}_4 \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (a) On a $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}_4,\mathrm{can}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

   (b) On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = P_{\mathrm{can}_3 \to \mathcal{C}}^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}_4,\mathrm{can}_3}\,P_{\mathrm{can}_4 \to \mathcal{B}}.$$

   On calcule l'inverse $P_{\mathrm{can}_3 \to \mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 8 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Autocorrection D.

1. On va montrer que la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda e_1' + \mu e_2' + \nu e_3' = 0_E$.
   En remplaçant les trois vecteurs par leur expression et en rassemblant les termes, on obtient

$$\lambda(e_2 + e_3) + \mu(e_1 - e_2 + e_3) + \nu(e_1 - e_2) = 0 \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \mu + \nu = 0 \\ \lambda - \mu - \nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{S})$$

   par liberté de $\mathcal{B}$.
   Après résolution, on obtient que la seule solution de ce système est $\lambda = \mu = \nu = 0$, ce qui montre que $\mathcal{B}'$ est libre.
   Comme elle a $3 = \dim E$ vecteurs, on en déduit que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
   Remarque. On peut raisonner très légèrement différemment : le cours garantit que

$$\mathcal{B}' \text{ est une base} \Leftrightarrow \operatorname{rg} \mathcal{B}' = 3 \Leftrightarrow \operatorname{rg} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 3.$$

   On peut alors calculer le rang de $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en échelonnant cette matrice.
   On obtient alors que la forme échelonnée réduite de cette matrice est I_n, donc le rang de cette matrice est 3, ce qui conclut.
   Même si on ne prononce pas les mêmes mots, on fait en fait le même calcul, puisque la matrice M est la matrice du système $(\mathcal{S})$.

2. Calculons :

$$\begin{aligned} f(e_1') &= f(e_2 + e_3) \\ &= (-e_1 + 2e_2 + 2e_3) + (e_1 - e_2 - e_3) \\ &= e_2 + e_3 \\ &= e_1' \\ f(e_2') &= f(e_1 - e_2 + e_3) \\ &= (-3e_1 + 4e_2 + e_3) - (-e_1 + 2e_2 + 2e_3) + (e_1 - e_2 - e_3) \\ &= -e_1 + e_2 - e_3 \\ &= -e_2' \\ f(e_3') &= f(e_1 - e_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-3e_1 + 4e_2 + 2e_3) - (-e_1 + 2e_2 + 2e_3) \\
&= -2e_1 + 2e_3 \\
&= -2e_3'.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{diag}(1, -1, -2).$$

3. On a

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On calcule P^{-1} par la méthode des bimatrices :

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) && [L_1 \leftrightarrow L_3] \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) && [L_2 \leftarrow L_2 - L_1] \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) && [L_2 \leftrightarrow L_3] \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) && \begin{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{bmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right). && \begin{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. C'est une question de cours : on a

$$\begin{aligned}
A &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\
&= P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1} \\
&= PDP^{-1}.
\end{aligned}$$

5. Puisque le produit de deux matrices diagonales s'effectue « coefficient par coefficient », on obtient par une récurrence immédiate

$$\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \mathrm{diag}(1, (-1)^n, (-2)^n).$$

Par ailleurs, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
A^n &= \left(PDP^{-1}\right)^n \\
&= PDP^{-1}\,PDP^{-1}\,PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} \\
&= P\,D\,I_n\,D\,I_n \cdots I_n\,D\,P^{-1}
\end{aligned}$$

$$= PD^nP^{-1},$$

ce qu'une récurrence facile montrerait également.
In fine, on obtient

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n & (-2)^n \\ 1 & -(-1)^n & -(-2)^n \\ 1 & (-1)^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(-1)^n + 2(-2)^n & -(-1)^n + (-2)^n & (-1)^n - (-2)^n \\ 1 + (-1)^n - 2(-2)^n & 1 + (-1)^n - (-2)^n & -(-1)^n + (-2)^n \\ 1 - (-1)^n & 1 - (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Autocorrection E.

(i) Les deux vecteurs sont non colinéaires, donc la famille est libre.
D'après la version forte du théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille en « piochant » des vecteurs dans n'importe quelle famille génératrice, par exemple la famille génératrice.
Dans notre exemple, on vérifie par exemple directement que la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathbb{R}^4$.
On peut par exemple effectuer des opérations sur les colonnes pour montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 4, ce qui montre que la famille est une base.

(ii) Les deux vecteurs sont clairement colinéaires, donc la famille n'est pas libre. Par ailleurs, puisqu'elle n'a que deux éléments alors que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, elle ne peut pas être génératrice.

(iii) La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -12 & 0 \\ 7 & 35 & 2 \end{pmatrix}$$

est échelonnée et a trois pivots, donc elle est de rang 3. Cela montre que la famille est de rang 3, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(iv) La famille n'est jamais génératrice, puisqu'il s'agit d'une famille de 3 éléments de $\mathbb{R}^4$, qui est un espace vectoriel de dimension 4.
Par ailleurs, on montre que

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & a \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est une matrice échelonnée de rang

$$\begin{cases} 2 & \text{si } a = 1 \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, si $a = 1$, la famille n'est ni libre ni génératrice.
En revanche, si $a \neq 1$, la famille est libre, mais pas génératrice.
On montre par le calcul que si $a \neq 1$, alors la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathbb{R}^4$.

Autocorrection F.

1. Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
   Cela donne $\begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ \lambda + \mu + \nu \\ \mu + \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Après résolution du système linéaire, on obtient $\lambda = \mu = \nu = 0$, ce qui montre que $\mathcal{B}$ est libre.
   Comme elle a $3 = \dim \mathbb{R}^3$ éléments, la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. On peut utiliser la formule de changement de bases ou revenir à la définition de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$:
   - $f(e_1) = 2e_1$;
   - $f(e_2) = e_2$;
   - $f(e_3) = 0$,

   donc

   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(2, 1, 0).$$

3. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est échelonnée, donc on peut lire directement son rang comme nombre de pivots :

   $$\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = 2.$$

   Puisque $f(e_1) = 2e_1$ et $f(e_2) = e_2$, les deux vecteurs e_1 et e_2 appartiennent à $\mathrm{im}\, f$. On a donc, par stabilité par combinaisons linéaires,

   $$\mathrm{Vect}(e_1, e_2) \subseteq \mathrm{im}\, f.$$

   Comme $\dim \mathrm{im}\, f = \mathrm{rg}\, f = 2$ et que $\dim \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = 2$ (la famille (e_1, e_2) étant libre, en tant que sous-famille d'une base), on en déduit que $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{im}\, f$ par inclusion et égalité des dimensions.
   De même, l'expression $f(e_3) = 0$ entraîne $\mathrm{Vect}(e_3) \subseteq \ker f$, et $\mathrm{Vect}(e_3)$ est de dimension 1. D'après le théorème du rang, $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \mathrm{rg}\, f = 1$, donc on conclut que $\ker f = \mathrm{Vect}(e_3)$ par inclusion et égalité des dimensions.
   Ainsi, (e_1, e_2) est une base de $\mathrm{im}\, f$ et (e_3) est une base de $\ker f$.