Fractions rationnelles

Exercice 4.

On pourra s'intéresser aux propriétés asymptotiques de $R\left(\dfrac{X^2}{1+X^2}\right)$.

Exercice 8.

- Pour la deuxième fraction, on peut remarquer que la détermination de la DÉS de $\dfrac{(X^2-1)^n}{X^{2n}}$ serait plutôt facile. Or, elle n'est pas très différente de celle qui est demandée.
- Pour la dernière fraction, on pourra par exemple utiliser des arguments de nature asymptotique et de symétrie.

Exercice 9.

Pour la dernière fraction rationnelle, on peut utiliser un argument asymptotique pour déterminer le terme en $\dfrac{1}{X-1}$. Il s'agit alors de calculer $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}}\frac{1}{1-\omega}$, ce que l'on peut interpréter comme $\dfrac{P'(1)}{P(1)}$ pour un polynôme P bien choisi.

Exercice 15.

Il s'agit de décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{P'}$, $\dfrac{1}{XP}$ et $\dfrac{P''}{P}$, respectivement.

Exercice 18.

Pour la deuxième question, on pourra admettre qu'il n'existe pas d'injection $\mathbb{C}\to\mathbb{N}$ et utiliser la théorie de la dimension dans un cadre infini.

Exercice 20.

Quelques questions intermédiaires : (a) montrer que $\mathfrak{m}_\infty=\{P\in\mathcal{O}_\infty \mid \deg P<0\}$ est un idéal de $\mathcal{O}_\infty$; (b) montrer que $\mathcal{O}_\infty\setminus\mathfrak{m}_\infty=\mathcal{O}_\infty^\times$; (c) en déduire que deux éléments de $\mathcal{O}_\infty$ sont associés si et seulement s'ils ont le même degré.

Autocorrection

Autocorrection A.

- Si F est une telle fraction rationnelle, on peut trouver $z\in\mathbb{C}$ qui ne soit pas un pôle de F.
  Une récurrence immédiate montre $\forall n\in\mathbb{N}, F(z+n)=F(z)$.
  Les fractions rationnelles F et $F(z)$ (qui est constante) coïncident donc sur un ensemble infini. Par rigidité, elles sont égales, ce qui montre que F est constante.
- Réciproquement, évidemment, les fractions rationnelles constantes conviennent.

Autocorrection B.

Une telle fraction rationnelle aurait un degré égal à $-1/2$, ce qui est absurde.

Autocorrection C.

- La décomposition en éléments simples prend la forme
$$\frac{1}{(X^2+1)(X-1)^2} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{(X-1)^2} + \frac{\gamma X+\delta}{X^2+1}.$$
  - En multipliant par $(X-1)^2$ puis en évaluant en 1, on obtient $\beta = \dfrac{1}{2}$.
  - En multipliant par X^2+1, puis en évaluant en i, on obient $\gamma\, i+\delta = \dfrac{i}{2}$, c'est-à-dire $\gamma = \dfrac{1}{2}$ et $\delta = 0$.
  - L'argument asymptotique fournit $\alpha+\gamma = 0$, c'est-à-dire $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

  In fine,
$$\frac{1}{(X^2+1)(X-1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{X}{X^2+1}.$$
- En multipliant de part et d'autre par $(X^2+1)(X-1)^2$, on obtient la relation de Bézout :
$$\begin{aligned} 1 &= \left[-\frac{1}{2}(X-1)+\frac{1}{2}\right](X^2+1) + \frac{1}{2}X(X-1)^2 \\ &= \left(1-\frac{1}{2}X\right)(X^2+1) + \frac{1}{2}X\,(X-1)^2. \end{aligned}$$

Autocorrection D.

(i) $\dfrac{X+1}{X^2+X+1} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1-j}{X-j} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1-\bar{j}}{X-\bar{j}}$ (sur $\mathbb{R}$, c'est déjà un élément simple) ;

(ii) $\dfrac{1}{(X+1)^2(3-X)} = -\dfrac{1}{16}\dfrac{1}{X-3} + \dfrac{1}{16}\dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(X+1)^2}$;

(iii) $\dfrac{1}{(X^2-1)(X+1)^2} = \dfrac{1}{(X-1)(X+1)^3} = \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{X-1} - \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{X+1} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(X+1)^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(X+1)^3}$;

(iv) $\dfrac{7X^2+4X-4}{X^4-4X^2} = -\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{X^2} + \dfrac{2}{X-2} - \dfrac{1}{X+2}$;

(v) $\dfrac{X^4+1}{X^4-1} = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X+1} + \dfrac{i}{2}\dfrac{1}{X-i} - \dfrac{i}{2}\dfrac{1}{X+i} = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X+1} - \dfrac{1}{X^2+1}$;

(vi) $\dfrac{3X-1}{X^2(X+1)^2} = \dfrac{5}{X} - \dfrac{1}{X^2} - \dfrac{5}{X+1} - \dfrac{4}{(X+1)^2}$;

(vii) $\dfrac{X^3-1}{(X-2)^2} = X+4+\dfrac{12}{X-2} + \dfrac{7}{(X-2)^2}$;

(viii) $\dfrac{4}{(X^2+1)^2} = -\dfrac{1}{(X-i)^2} - \dfrac{i}{X-i} - \dfrac{1}{(X+i)^2} + \dfrac{i}{X+i}$ (sur $\mathbb{R}$, c'est déjà un élément simple) ;

(ix) $\dfrac{X^2+X+1}{X^3+X^2+X+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1-i}{X-i} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1+i}{X+i} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X+1}X^2+1$;

(x)
$$\begin{aligned} \frac{3X^4+X^3+4X^2-X-3}{(X+1)(X^2+1)^2} &= \frac{1}{X+1} + \frac{1}{4}\frac{4+5i}{X-i} + \frac{1}{4}\frac{3-i}{(X-i)^2} + \frac{1}{4}\frac{4-5i}{X+i} + \frac{1}{4}\frac{3+i}{(X+i)^2} \\ &= \frac{1}{X+1} + \frac{2X-1}{X^2+1} + \frac{X-3}{(X^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Autocorrection E.

- On a la décomposition en éléments simples (célèbre) $\dfrac{1}{X(X+1)} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X+1}$, d'où il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

par télescopage.

- De même, la décomposition en éléments simples $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X+2}$ donne

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)(n+2) - 2}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$