
Intégration

Exercice 3.

Pour la deuxième question, on pourra s'intéresser à $I + J$...

Exercice 21.

On cherchera à appliquer la stricte positivité de l'intégrale à une fonction très judicieusement choisie (en fonction de l'objectif).

Exercice 22.

On pourra commencer par généraliser : si l'inégalité demandée est vraie, étant donné $f \in C^0([0, 1])$ (sans hypothèse sur l'intégrale), quelle inégalité obtiendrait-on entre $\int_0^1 f^2$, $\int_0^1 f$, $\min f$ et $\max f$?

Ce résultat généralisé est peut-être plus facile à démontrer !

Exercice 24.

On cherchera à exprimer l'hypothèse en fonction d'une primitive de f .

Exercice 26.

Pour les trois premières questions, on pourra chercher à faire apparaître la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ (et faire quelque chose de comparable pour la dernière).

Exercice 32.

On pourra tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1+t^2}{2}$ et chercher à l'encadrer entre deux fonctions affines judicieuses.

Exercice 33.

Pour la deuxième intégrale, on pourra s'intéresser aux comportements possibles de

$$F : x \mapsto \int_0^x \sin^2(t) \arctan(t) dt$$

au voisinage de $+\infty$.

On pourra notamment s'intéresser à la suite $(F(2\pi n + \alpha) - F(2\pi n + \beta))_{n \in \mathbb{N}}$ pour un choix judicieux de α et β .

Exercice 40.

Dans la première question, on ne cherchera pas à calculer l'intégrale, mais on utilisera l'inégalité triangulaire.

Exercice 48.

1. Il s'agit de reconnaître que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est le carré d'une somme de Riemann.
2. On somme « en gros » la moitié des termes apparaissant dans la suite précédente et ces termes présentent une symétrie $k \leftrightarrow \ell$. Il faut essayer d'exploiter concrètement cette remarque.

Exercice 55.

Dans la première question, on pourra raisonner à partir d'un point où f s'annule, dont on montrera l'existence.

Autocorrection**Autocorrection A.**

(Pour gagner de la place, on omet abusivement les $x \mapsto$ en tête des expressions).

- | | |
|--|---|
| (i) $-\frac{1}{4}e^{-2x^2} + \kappa;$ | (xi) $\ln \sin x + \kappa;$ |
| (ii) $\frac{(\ln x)^2}{2} + \kappa;$ | (xii) $\frac{1}{3} \ln 1 + x^3 + \kappa;$ |
| (iii) $-\arctan(\cos x) + \kappa;$ | (xiii) $-\ln(1 + \cos^2 x) + \kappa;$ |
| (iv) $\sin(\ln x) + \kappa;$ | (xiv) $2\sqrt{\tan x} + \kappa;$ |
| (v) $\frac{1}{2\cos^2 x} + \kappa;$ | (xv) $2\ln(1 + \sqrt{x}) + \kappa;$ |
| (vi) $-\frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} + \kappa;$ | (xvi) $\ln x (\ln \ln x - 1) + \kappa;$ |
| (vii) $\frac{\sin^6 x}{6} + \kappa;$ | (xvii) $\exp(e^x) + \kappa;$ |
| (viii) $-\frac{1}{80} \cos(5x) + \frac{5}{48} \cos(3x) - \frac{5}{8} \cos x + \kappa;$ | (xviii) $\arctan(\ln x) + \kappa;$ |
| (ix) $\tan x - x + \kappa;$ | (xix) $2\sqrt{1 + \ln x} + \kappa;$ |
| (x) $-\frac{1}{3} \frac{1}{(\ln x)^3} + \kappa;$ | (xx) $-\frac{e^{-x}}{5} (\sin 2x + 2 \cos 2x) + \kappa;$ |
| | (xxi) $\frac{1}{2} (\sin x \operatorname{ch} x - \cos x \operatorname{sh} x) + \kappa.$ |

Autocorrection B.

- (i) $x \mapsto \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-5}{x-2} \right| + \kappa;$
- (ii) $x \mapsto 2 \ln|x-5| - \ln|x-2|;$
- (iii) $x \mapsto x + \frac{31}{3} \ln|x-5| - \frac{7}{3} \ln|x-2| + \kappa;$
- (iv) $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + \kappa;$
- (v) $x \mapsto \ln(x^2 + 1) + 4 \arctan x + \kappa;$
- (vi) $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}} \right) + \kappa;$
- (vii) $x \mapsto \frac{1}{3-x} + \kappa;$
- (viii) $x \mapsto x - \ln((x+2)^2) - \frac{1}{x+2} + \kappa;$
- (ix) $x \mapsto \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{18} \ln|x+1| - \frac{4}{9} \ln|x-2| - \frac{1}{3} \frac{1}{x-2} + \kappa;$
- (x) $x \mapsto -\frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{4}|x+1| + \frac{1}{2} \arctan x + \kappa;$
- (xi) $x \mapsto -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4}|x+1| + \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + \kappa;$

- (xii) $x \mapsto \frac{1}{2} \arctan(x^2) + \kappa$ (par la méthode brutale, $x \mapsto \frac{1}{2} (\arctan(\sqrt{2}x - 1) - \arctan(\sqrt{2}x + 1)) + \kappa'$, mais c'est pareil);
- (xiii) $x \mapsto \frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \kappa$.

Autocorrection C.

- (i) $e - 2$ (on fait deux IPP, d'abord en dérivant $t \mapsto t^2$ et en primitivant exp, puis en dérivant $t \mapsto t$ et en primitivant exp);
- (ii) $\frac{1}{9} (2e^3 + 1)$ (on dérive ln et on primitive $t \mapsto t^2$);
- (iii) $\frac{\pi}{3}$ (on dérive $t \mapsto t$ et on primitive $t \mapsto \sin(3t)$);
- (iv) $\frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}$ (on dérive $t \mapsto t$ et on primitive $t \mapsto \sqrt{t + 1}$);
- (v) $\frac{5}{3} \ln 2 - \ln 3$ (on dérive ln et on primitive $t \mapsto \frac{1}{(t + 1)^2}$);
- (vi) $\frac{1}{2}$ (on dérive $t \mapsto t^2$ et on primitive $t \mapsto t e^{t^2}$);
- (vii) $\frac{\ln 2}{4}$ (on dérive arctan et on primitive $t \mapsto \frac{1}{(t + 1)^2}$; il reste une fraction rationnelle à décomposer en éléments simples, puis à intégrer);
- (viii) $\frac{\pi^2}{4} - 2$ (on dérive arcsin² et on primitive 1; dans une deuxième IPP, on primitive $\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ et on dérive arcsin);
- (ix) $\frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}$ (on primitive $x \mapsto x^2$ et on dérive arctan).

Autocorrection D.

- (i) $\frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}$ ($u = t + 1$);
- (ii) $12 - 4e$ ($x = u^2$);
- (iii) $\frac{5}{48}$ ($u = t^2$);
- (iv) $\frac{\pi}{2}$ ($x = \cos \theta$);
- (v) $2 - \frac{\pi}{2}$ ($t = e^x$ puis $t = u^2 + 1$);
- (vi) $\frac{1 + e^\pi}{2}$ ($t = e^x$, puis on intègre l'exponentielle complexe $x \mapsto e^{(1+i)x}$);
- (vii) $\frac{\pi}{6}$ ($u = \sqrt{x}$);
- (viii) $2(\ln 2)^2 - 4 \ln 2 + 2$ ($u = \ln x$);
- (ix) $\frac{\pi}{12}$ ($u = x^3$);
- (x) $\frac{\pi}{8}$ ($x = \sin \theta$ ou $x = \cos \theta$, puis linéarisation);
- (xi) $1 + \ln 2 - \ln(e + 1)$ ($u = e^x$);
- (xii) $\frac{\pi}{8}$ (on peut commencer par $x = u^4$, puis $u = \sin \theta$ s'impose...);
- (xiii) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ($u = \cos t$);
- (xiv) $\frac{7}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2}$ ($t = 1/u$; on peut aussi faire une IPP).

Autocorrection E.

D'après le théorème fondamental, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe C^1 , et $F' = f$. En particulier, elle est continue sur $]a, b[$ et dérivable sur $]a, b[$.

D'après le théorème des accroissements finis, on peut trouver $c \in]a, b[$ tel que $F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$, ce qui donne

$$f(c) = F'(c) = \frac{1}{b - a} (F(b) - \underbrace{F(a)}_{=0}) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) dt.$$

Autocorrection F.

La fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en 0.

La fonction de l'énoncé, qui est $x \mapsto \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x}$ converge donc vers $F'(0) = f(0)$.

Autocorrection G.

La fonction \tan est croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right], 0 \leq \underbrace{\tan \frac{\pi}{6}}_{=\frac{1}{\sqrt{3}}} \leq \tan x \leq \underbrace{\tan \frac{\pi}{3}}_{=\sqrt{3}}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est à valeurs ≥ 0 sur $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[$, on peut multiplier cet encadrement par $\frac{1}{x}$ pour obtenir

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right], \frac{1}{x\sqrt{3}} \leq \frac{\tan x}{x} \leq \frac{\sqrt{3}}{x}.$$

On en déduit, par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{x} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\tan x}{x} dx \leq \sqrt{3} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{x}.$$

Or,

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{x} = [\ln x]_{x=\pi/6}^{\pi/3} = \ln \left(\frac{\pi}{3} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{3} \right) = \ln 2.$$

On en déduit l'encadrement de l'énoncé.

Autocorrection H.

On peut intégrer l'inégalité $\forall t \in \mathbb{R}, t - 1 \leq [t] \leq t$ et obtenir, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x^2}{2} - x \leq \int_0^x (t - 1) dt \leq \int_0^x [t] dt \leq \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}.$$

On en déduit facilement, d'après le théorème des gendarmes, que $\int_0^x [t] dt \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Autocorrection I.

(i) On a, d'après le théorème sur les sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin = \frac{2}{\pi}.$$

$$(ii) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k/n}{1 + k^2/n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_{x=0}^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

$$(iii) \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k/n} + \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} + 0 = \ln 2.$$

Autocorrection J.

(i) La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est lisse. Sa valeur en 0 est 0.

- ▶ Sa dérivée est $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$, dont la valeur en 0 est $f'(0) = 1$.
- ▶ Sa dérivée seconde est $f'' : x \mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}$, dont la valeur en 0 est $f''(0) = -1$.
- ▶ Sa dérivée troisième est $f''' : x \mapsto \frac{2}{(1+x)^3}$, dont la valeur en 0 est $f'''(0) = 2$, et qui est à valeurs positives sur \mathbb{R}_+ .
- ▶ Sa dérivée quatrième est $f^{(4)} : x \mapsto -\frac{6}{(1+x)^4}$, qui est à valeurs négatives sur \mathbb{R}_+ .

D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 (que l'on peut appliquer parce que f est de classe C^3), quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \underbrace{\frac{(x-t)^2}{2}}_{\geq 0} \underbrace{f'''(t)}_{\geq 0} dt \\ &\geq x - \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \quad (\text{croissance de l'intégrale, } 0 \leq x)$$

De même, d'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 (que l'on peut appliquer parce que f est de classe C^4), quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \int_0^x \underbrace{\frac{(x-t)^3}{6}}_{\geq 0} \underbrace{f^{(4)}(t)}_{\leq 0} dt \\ &\leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}. \end{aligned} \quad (\text{croissance de l'intégrale, } 0 \leq x)$$

(ii) On procède de même pour la fonction \sin .

- ▶ La formule de Taylor à l'ordre 3 et le fait que la dérivée quatrième, $\sin^{(4)} = \sin$, est positive sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ montre la première inégalité.
- ▶ La formule de Taylor à l'ordre 5 et le fait que la dérivée sixième, $\sin^{(6)} = -\sin$, est négative sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ montre la deuxième inégalité.