Séries

Autocorrection A. ☑

Déterminer (en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$) la nature des séries de terme général :

(i) $n\sin(1/n)$;

(ii) $\dfrac{n^n}{2^n}$;

(iii) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$;

(iv) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

(v) $1-\cos\dfrac{\pi}{n}$;

(vi) $\dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$;

(vii) $a^n n!$;

(viii) $ne^{-\sqrt{n}}$;

(ix) $\dfrac{\ln n}{n^a}$;

(x) $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$;

(xi) $\dfrac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$;

(xii) $\dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$;

(xiii) $\sqrt{\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}-1}$;

(xiv) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

(xv) $\left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$;

(xvi) $\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}$;

(xvii) $e^{1/n}-a-\dfrac{b}{n}$;

(xviii) $\dfrac{1}{n^a}\left((n+1)^{1+1/n}-(n-1)^{1-1/n}\right)$.

Exercice 1. ☑

Déterminer la nature des séries suivantes.

(i) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

(ii) $\displaystyle\sum_n \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$;

(iii) $\displaystyle\sum_n \frac{n^\gamma+\ln n}{n^2}$, pour $\gamma \in \mathbb{R}$;

(iv) $\displaystyle\sum_n \left(\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}\right)$, pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ (et déterminer la somme le cas échéant) ;

(v) $\displaystyle\sum_n \frac{a^n\cdot 2^{\sqrt{n}}}{b^n+2^{\sqrt{n}}}$, pour $a, b > 0$;

(vi) $\displaystyle\sum_n (1-\operatorname{th}(n))$;

(vii) $\displaystyle\sum_n \left(\sqrt[3]{n^3+\alpha n^2+\beta n+\gamma}-\sqrt{n^2+n+1}\right)$, pour $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$;

(viii) $\displaystyle\sum \left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{n^\alpha}\right)-\frac{\pi}{4}\right)$, pour $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$;

(ix) $\displaystyle\sum_n \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$, pour $\alpha\in\mathbb{R}$;

(x) $\dfrac{a}{\sqrt{1}}+\dfrac{b}{\sqrt{2}}+\dfrac{c}{\sqrt{3}}+\dfrac{a}{\sqrt{4}}+\dfrac{b}{\sqrt{5}}+\dfrac{c}{\sqrt{6}}+\dfrac{a}{\sqrt{7}}+\cdots$, pour $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Exercice 2.

Déterminer la nature des séries suivantes.

(i) $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$.

(ii) $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$, pour $\alpha\in\mathbb{R}$;

(iii) $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n n^\alpha}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, pour $\alpha\in\mathbb{R}$;

(iv) $\displaystyle\sum_n \sin\left(\sqrt{1+n^2\pi^2}\right)$.

Exercice 3.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\begin{cases}1/n & \text{si } n \text{ est un carré ;}\\ 1/n^2 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

Exercice 4$^+$.

Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{\lfloor \ln n\rfloor}}{n}$.

Exercice 5.

Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{\sin(\ln n)}{n}$?

Exercice 6.

Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_n \ln\left(\frac{\ln(n+1)^2}{\ln n\ln(n+2)}\right)$?

Exercice 7$^+$.

1. On définit, pour $n\geqslant 1$, $u_n=\displaystyle\frac{1}{\ln(n!)}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n$.
2. On définit, pour $n\geqslant 1$, $v_n=\displaystyle\int_0^{\pi/n}\frac{\sin^3 x}{1+x}\,dx$. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}v_n$;
3. On considère une suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $w_1\in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N}, w_{n+1}=e^{-w_n}/n^\alpha$, où $\alpha\in\mathbb{R}$. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}w_n$.

Exercice 8$^+$.

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $A\mapsto\displaystyle\int_1^A e^{-x^n}\,dx$ admet une limite quand $A\to+\infty$, que l'on notera $\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-x^n}\,dx$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_1^{+\infty}e^{-x^n}\,dx$.

Exercice 9^{++}.

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_n \sin\left((1+\sqrt{2})^n\pi\right)$.

Calculs de sommes

Exercice 10.

Montrer les égalités suivantes, après avoir justifié l'existence des sommes infinies.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2\,;$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0\,;$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right) = \ln 2\,;$

(iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(3 + (-1)^k\right)^{-k} = \frac{26}{15}.$

Exercice 11.

Justifier l'existence et calculer la somme des séries suivantes.

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}\,;$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1}\,;$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\,;$

(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)}.$

Exercice 12.

Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2))$ est-elle convergente ?

Le cas échéant, calculer sa somme.

Exercice 13.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}.$

Exercice 14 (Formule de Madhava-Gregory-Leibniz).

En remarquant que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{1}{p+1} = \int_0^1 x^p\, dx$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$

Exercice 15$^+$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \begin{cases} -4/n & \text{si } 5 \mid n \\ 1/n & \text{sinon.} \end{cases}$

Montrer que la série $\displaystyle\sum_n u_n$ converge, et calculer sa somme.

Exercice 16$^+$.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$

Comparaison séries-intégrales

Autocorrection B. ☑

Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 17 (Séries de Bertrand). ☑

On appelle *séries de Bertrand* les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$, pour des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la nature des séries de Bertrand telles que $\alpha \neq 1$, par comparaison avec des séries de Riemann bien choisies.
2. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer la nature des séries de Bertrand telles que $\alpha = 1$.

Exercice 18. ☑

Montrer que $(s-1)\zeta(s) \xrightarrow[s\to 1]{} 1$.

Exercice 19. X

Calculer $\displaystyle\left\lfloor \sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}} \right\rfloor$.

Exercice 20$^+$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\sin(\ln t)}{t}\,dt$ diverge en $+\infty$.
2. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer $\displaystyle\left| \frac{\sin(\ln k)}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\sin(\ln t)}{t}\,dt \right| = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$.
3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\ln n)}{n}$ diverge.

Exercice 21^{++} (Séries de Hardy).

1. Soit $f \in C^1([1,+\infty[)$ telle que $x \mapsto \displaystyle\int_1^x |f'(t)|\,dt$ converge en $+\infty$ (on dit que f' est *intégrable*).

   Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ converge en $+\infty$.
2. Soit $\alpha > 0$. Pour quelles valeurs de α la série $\displaystyle\sum_n \frac{\sin\sqrt{n}}{n^{\alpha}}$ converge-t-elle ?

Critères de convergence

Exercice 22.
Soient $\sum_n u_n$, $\sum_n v_n$ et $\sum_n w_n$ trois séries réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Montrer que si $\sum_n u_n$ et $\sum_n w_n$ convergent, alors $\sum_n v_n$ converge également.

Exercice 23.
Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs.

1. On suppose que $\sum_n u_n$ converge. Prouver que, pour tout $\alpha > 1$, $\sum_n u_n^\alpha$ converge.
2. On suppose que $\sum_n u_n$ diverge. Prouver que, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $\sum_n u_n^\alpha$ diverge.

Exercice 24.
Soit $\sum_n a_n$ une série à termes positifs.

1. Montrer que la convergence de $\sum_n a_n$ entraîne celle de $\sum_n \sqrt{a_n a_{n+1}}$.
2. Montrer que la réciproque est vraie si on suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît, mais qu'elle n'est pas vraie en général.

Exercice 25.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On pose, pour tout n, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Exercice 26⁺ (Critère de d'Alembert).
Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que si $\ell < 1$ (resp. $\ell > 1$), alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge (resp. diverge).
2. Montrer que l'on ne peut pas conclure si $\ell = 1$, en exhibant un exemple de chaque nature.

Exercice 27⁺ (Critère de condensation de Cauchy).

1. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle décroissant vers 0.
   Montrer que les séries $\sum_n a_n$ et $\sum_n 2^n a_{2^n}$ ont même nature.
2. Quelle est la nature de la série $\sum_n \dfrac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$? Généraliser.

Exercice 28 (Transformation d'Abel). ☑

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs complexes et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_{n+1}V_n - \sum_{k=0}^{n}(u_{n+1} - u_n)V_n$.
2. En déduire une nouvelle démonstration du critère spécial des séries alternées.
3. Plus généralement, montrer le *critère d'Abel* : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, décroissante, qu'elle converge vers 0 et que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $\sum_n u_n v_n$ converge.
4. Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ en fonction de $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 29.

Soit $\sum a_n$ une série et φ une extractrice. On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p = \sum_{\varphi(p)\leqslant k<\varphi(p+1)} a_k$.

1. Montrer que si $\sum_n a_n$ converge, il en va de même de $\sum_p S_p$ et qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{p=0}^{+\infty} S_p$.
2. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Montrer que si $\sum_p S_p$ converge et que $\sum_{\varphi(p)\leqslant k<\varphi(p+1)} |a_k| \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$, alors $\sum_n a_n$ converge.

Exercice 30.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle positive décroissante telle que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

1. En considérant la somme $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$, montrer que $n\,u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. Montrer que l'hypothèse de décroissance est cruciale dans la question précédente.
3. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} n(u_n - u_{n+1})$ converge et a pour somme $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
4. Application : calculer pour $0 \leqslant r < 1$ les sommes $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^k$.

Exercice 31$^+$.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

1. Montrer *le critère de Raabe-Duhamel* : si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.
   Montrer que l'on ne peut pas conclure si $\alpha = 1$.
2. Démontrer le *critère de Gauss* : s'il existe $\lambda > 1$ tel que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\lambda}\right)$, alors la série $\sum a_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
3. Application : pour $z \in \mathbb{C}$ et $m \geqslant 1$, on définit la *factorielle montante* $z^{\overline{m}} = z(z+1)\cdots(z+m-1)$. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$. Pour quelles valeurs de x la *série hypergéométrique* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^{\overline{n}}\beta^{\overline{n}}}{\gamma^{\overline{n}}}\frac{x^n}{n!}$ converge-t-elle ?

Mélange

Exercice 32.
Soit $\sum_n a_n$ une série à termes positifs convergente (resp. divergente). Montrer qu'il existe une suite b_n positive tendant vers $+\infty$ (resp. 0) telle que $\sum_n a_n b_n$ soit encore convergente (resp. divergente).

Exercice 33.

1. Soit $(\eta_n)_{n\geqslant 1}$ une suite strictement positive convergeant vers 0. Montrer qu'il existe une série à termes positifs convergente $\sum_n a_n$ telle que $a_n \neq o(\eta_n)$.
2. Soit $\sum_n a_n$ une série à termes positifs convergente dont le terme général décroît.

   Montrer que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 34^{+++}.
On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *préserve la convergence* si pour toute série $\sum_n a_n$ convergente, la série $\sum_n f(a_n)$ converge également. Montrer que les fonctions préservant la convergence sont les fonctions linéaires sur un voisinage de 0.

Exercice 35.

1. Donner un équivalent de l'aire u_n comprise entre le graphe de ln sur $[n, n+1]$ et la corde correspondante.
2. En déduire un développement asymptotique à 5 termes de $\ln n!$ puis un développement asymptotique à deux termes de $n!$.

Exercice 36^{+}.

1. Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs convergentes telles que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$.

   Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
2. En utilisant la question précédente, donner un équivalent, pour tout $a \in]1, +\infty[$, de $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   Comment peut-on obtenir cet équivalent directement ?
3. Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 37.

Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(2 - 3^{1/k}\right)$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2. Déterminer sa limite.
3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n^{\ln(3)}}$.

Exercice 38. *X (PSI)*

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs et $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ sa somme partielle. On suppose

$$a_n S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

1. Montrer que $\sum a_n$ diverge et que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Montrer que $S_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} S_{n+2}$.
3. Montrer que $S_{n+1}^2 - S_{n+2}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.
4. Montrer que $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.
5. Réciproquement, montrer que si $b_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, $b_n \sum_{k=0}^{n} b_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 39^{++} (Cardinal de $\mathbb{R}$ et ensemble de Cantor).

1. Montrer que l'application $\varphi : \begin{cases} \{0,2\}^{\mathbb{N}} & \to \quad \mathbb{R} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{3^k} \end{cases}$ est bien définie et injective.
2. Montrer que *l'ensemble de Cantor* $K = \varphi\left[\{0,2\}^{\mathbb{N}}\right]$ est une partie fermée (c'est-à-dire égale à son adhérence) de $\mathbb{R}$ qui ne contient aucun intervalle non trivial.
3. Montrer qu'il existe des injections $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 40^{+}.

1. Déterminer toutes les fonctions $f \in C^0([0,1])$ telles que $\forall x \in [0,1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{f(x^n)}{2^n}$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f \in C^0([0,1])$ telles que $\forall x \in [0,1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{f(x^n)}{3^n}$.

Exercice 41^{+}.

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs convergente telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Montrer que pour tout $S \in \left[0, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right]$, il existe un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ tel que $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_A(k)\, u_k$.