Déterminants

Exercice 4.
On rappelle que les transpositions sont toutes conjuguées entre elles.

Exercice 18.
Étant donné $A \in GL_2(\mathbb{F}_p)$, il s'agit déjà de trouver $p+1$ « objets » que la matrice permute...

Exercice 26.
Pour la première question, on pourra effectuer des opérations sur les lignes « par blocs » ou, ce qui revient au même, multiplier par une habile matrice triangulaire par blocs.

Exercice 27.
On pourra exprimer $[A]_{i,j}$ comme une somme mettant en jeu des indicatrices telles que $\mathbb{1}_{(k|i)}$.

Exercice 28.
On peut obtenir une relation de récurrence à l'aide d'opérations sur les lignes et les colonnes.

Exercice 29.
Le déterminant à calculer ressemble à un mineur. Il s'agit donc de le « compléter » en un déterminant $(n+1)\times(n+1)$ dans lequel on pourra *identifier* le mineur correspondant à la k-ième colonne (et une certaine ligne).

Exercice 48.
On pourra utiliser des opérations élémentaires, en raisonnant « par blocs ».

Exercice 49.
On pourra s'inspirer de la démonstration, vue en cours, de l'unicité à une constante multiplicative près d'une forme n-linéaire alternée sur un espace vectoriel de dimension n.

Autocorrection

Autocorrection A.

1. On obtient les décompositions en cycles disjoints suivantes :
   (i) $(1\ 5\ 2\ 4\ 6\ 8)(3\ 9)$, donc $\varepsilon(\sigma) = 1$;
   (ii) $(1\ 7\ 5\ 3)(2\ 9)(4\ 6)$, donc $\varepsilon(\sigma) = 1$;
   (iii) $(2\ 7\ 4\ 8\ 9)(3\ 6\ 5)$, donc $\varepsilon(\sigma) = 1$;
   (iv) $(1\ 2)(3\ 5)(8\ 9)$, donc $\varepsilon(\sigma) = -1$.
2. En utilisant que ε est un morphisme et qu'un k-cycle γ vérifie $\varepsilon(\gamma) = (-1)^{k-1}$, on obtient les signatures 1, -1, 1 et -1, respectivement.

Autocorrection B.

(i) 0;

(ii) $(1-a^2)^2$;

(iii) $(a-b)^2(a+b+2c)(a+b-2c)$;

(iv) 0;

(v) $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} a_1 \cdots a_n$;

(vi) $D_{2n} = D_{2n+1} = (-1)^n$.