Déterminants

Groupe symétrique

Signature

Autocorrection A. ☑

1. Calculer la décomposition en cycles à supports disjoints et la signature des permutations suivantes de $\mathfrak{S}(9)$:

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 9 & 6 & 2 & 8 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 6 & 3 & 4 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$;

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 7 & 6 & 8 & 3 & 5 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$;

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Sans calculer les décompositions en cycles disjoints, déterminer les signatures des permutations suivantes de $\mathfrak{S}(9)$:

(i) $(1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2)$;

(ii) $(2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)$;

(iii) $(1\ 2)(2\ 4\ 6\ 5)(1\ 3\ 7)(2\ 5\ 4)(3\ 5\ 6\ 1)(2\ 5)(1\ 4\ 6)$;

(iv) $(1\ 2\ 3)(4\ 5)(1\ 6\ 7\ 8\ 9)(1\ 5\ 9)$.

Exercice 1.

Soit $n \geqslant 1$.

1. Calculer les signatures des éléments de $\mathfrak{S}(n)$ suivants :

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$.

2. Calculer les signatures des éléments de $\mathfrak{S}(2n)$ suivants :

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \cdots & 2n-2 & 2n-3 & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$;

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-3 & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n-4 & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

Pour $n \geqslant 5$, on considère la permutation

$$\sigma = (1\ 2\ 3) \circ (2\ 3\ 4) \circ (3\ 4\ 5) \circ \cdots \circ (n-4\ n-3\ n-2) \circ (n-3\ n-2\ n-1) \circ (n-2\ n-1\ n).$$

Déterminer la décomposition en cycles disjoints de σ, son ordre et sa signature.

Exercice 3.

Montrer qu'il existe un morphisme injectif $\mathfrak{S}(n) \to \mathfrak{A}(n+2)$.

Exercice 4$^+$ (Abélianisation de $\mathfrak{S}(n)$).

Soit $n \geqslant 1$, A un groupe abélien (noté multiplicativement) et $\varphi : \mathfrak{S}(n) \to A$ un morphisme de groupes.

Montrer qu'il existe un morphisme de groupes $\iota : \{\pm 1\} \to A$ tel que $\varphi = \iota \circ \varepsilon$.

Exercice 5$^+$.

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{A}(n)$, on note

$$C_{\mathfrak{S}}(\sigma) = \left\{ \pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} \,\middle|\, \pi \in \mathfrak{S}(n) \right\} \qquad \text{et} \qquad C_{\mathfrak{A}}(\sigma) = \left\{ \pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} \,\middle|\, \pi \in \mathfrak{A}(n) \right\}.$$

Montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{A}(n)$, on a soit $C_{\mathfrak{S}}(\sigma) = C_{\mathfrak{A}}(\sigma)$, soit il existe une permutation $\sigma' \in \mathfrak{A}(n)$ telle que $C_{\mathfrak{S}}(\sigma) = C_{\mathfrak{A}}(\sigma) \sqcup C_{\mathfrak{A}}(\sigma')$.

Théorie des groupes

Exercice 6.

Déterminer les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}(6)$ commutant à $(123)(456)$.

Exercice 7.

Déterminer les permutations de $\mathfrak{S}(n)$ commutant à $(1234 \cdots n)$.

Exercice 8$^+$.

Montrer que le sous-groupe de $\mathfrak{S}(8)$ engendré par $(123)(567)$ et $(12)(34)(56)(78)$ est de cardinal 12.

Exercice 9.

Soit $n \geqslant 3$. Montrer que l'identité est le seul élément $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ tel que $\forall \pi \in \mathfrak{S}(n), \pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi$.

Exercice 10$^+$.

1. Montrer que si γ et $\delta \in \mathfrak{S}(n)$ sont deux cycles qui commutent, on a $\mathrm{supp}(\gamma) = \mathrm{supp}(\delta)$ ou $\mathrm{supp}(\gamma) \cap \mathrm{supp}(\delta) = \varnothing$.
2. Montrer que si $\gamma \in \mathfrak{S}(n)$ est un n-cycle, les seules permutations commutant avec γ sont les éléments du sous-groupe engendré $\langle \gamma \rangle$.

Exercice 11.

1. Étant donné un élément $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$, déterminer son ordre en fonction de sa décomposition en cycles disjoints.
2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(10)$ d'ordre 14. Calculer $\varepsilon(\sigma)$.
3. Déterminer l'ordre maximal d'un élément de $\mathfrak{S}(10)$.

Exercice 12$^+$.

Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on note $\tau_i = (i\; i+1)$.

1. Montrer que les permutations $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ engendrent $\mathfrak{S}(n)$.
2. Montrer qu'une famille formée de $k < n-1$ transpositions n'engendre pas $\mathfrak{S}(n)$.

Exercice 13$^+$.

On note $\gamma = (1\ 2\ 3\ \cdots\ n) \in \mathfrak{S}(n)$.

1. Montrer que γ et $(1\ 2)$ engendrent $\mathfrak{S}(n)$.
2. Plus généralement, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur une transposition τ pour que γ et τ engendrent $\mathfrak{S}(n)$.

Exercice 14^{++}.

Soit $n \geqslant 3$. Montrer que le groupe alterné $\mathfrak{A}(n)$ est engendré par les 3-cycles.

Exercice 15.

Peut-on trouver une suite $(\tau_i)_{i=1}^{n!-1}$ de transpositions telle que

$$\mathfrak{S}(n) = \left\{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}, \tau_1, \tau_2 \circ \tau_1, \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1, \dots, \tau_{n!-1} \circ \tau_{n!-2} \circ \cdots \circ \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1\right\} \ ?$$

Exercice 16$^+$. *ÉNS*

On considère le sous-groupe $G \subseteq \mathfrak{S}(n)$ constitué des permutations σ telles que $\sigma(1) = 1$.

Montrer que G est un sous-groupe maximal de $\mathfrak{S}(n)$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de sous-groupe H de $\mathfrak{S}(n)$ tel que $G \subsetneq H \subsetneq \mathfrak{S}(n)$.

Exercice 17$^+$.

Soit $G \subseteq \mathfrak{S}(n)$ abélien tel que $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n, \exists \sigma \in G : \sigma(i) = j$. Montrer que $|G| = n$.

Exercice 18^{++}.

1. Montrer que $GL_2(\mathbb{F}_2)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}(3)$.
2. Construire un morphisme surjectif $GL_2(\mathbb{F}_3) \to \mathfrak{S}(4)$ dont le noyau est $\{\pm I_2\}$.

Multilinéarité

Exercice 19. *X*

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont tous les coefficients appartiennent à $\{\pm 1\}$.

Montrer que dét A est un entier divisible par 2^{n-1}.

Exercice 20$^+$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\varphi : \begin{cases} E \times \cdots \times E \to & K \\ (v_1, \dots, v_n) \mapsto \text{dét}\left(u(x_1), x_2, \dots, x_n\right) + \cdots + \text{dét}\left(x_1, x_2, \dots, u(x_n)\right). \end{cases}$$

Montrer $\varphi = \mathrm{tr}(u)\ \text{dét}$.

Exercice 21^{++}.

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Lambda^p E^*$ l'ensemble des applications p-linéaires alternées $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{p \text{ facteurs}} \to K$.

Montrer que $\Lambda^p E^*$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Calcul de déterminants

Autocorrection B.

Calculer les déterminants des matrices suivantes, où $a, b, c, d, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ sont des paramètres.

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$;

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$;

(iii) $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$;

(iv) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$;

(v) $\det\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, E_{i,n+1-i}\right)$;

(vi) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (matrice $n \times n$).

Exercice 22.

Calculer les déterminants $n \times n$ suivants (a, x, y et z désignent des paramètres réels).

(i) $\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \dots & 0 \\ 0 & -x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}$;

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$;

(iii) $\begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & z & 0 & \dots & 0 \\ y & 0 & z & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}$;

(iv) $\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$, où $S_n = \sum_{i=1}^{n} i$.

Exercice 23.

Calculer les déterminants $n \times n$ suivants (a désigne un paramètre réel).

(i) $\det\left(a^{\max(i,j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$;

(ii) $\det\left(\binom{i}{j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$;

(iii) $\det\left(\binom{i+j-2}{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$;

(iv) $\det\left(P(i+j-1)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, où $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

Exercice 24.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $J = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que J est semblable à $n\, E_{1,1}$.
2. En déduire la valeur du déterminant $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

Exercice 25$^+$ (Déterminants circulants).

Dans tout l'exercice, on fixe $n \geqslant 2$ et $\zeta = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

1. On note $C = E_{1,n} + \sum_{j=1}^{n-1} E_{j+1,j} \in M_n(\mathbb{C})$.

   Reconnaître une matrice de permutation et en déduire que $C^n = I_n$.
2. Montrer que pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$, l'espace vectoriel $\{X \in \mathbb{C}^n \mid CX = \omega X\}$ est une droite, et en déduire que C est semblable à la matrice $\operatorname{diag}(1, \zeta, \ldots, \zeta^{n-1})$.
3. En déduire que, pour tous $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \left(a_0 + \zeta^j a_1 + \cdots + \zeta^{j(n-1)} a_{n-1}\right).$$

Exercice 26$^+$ (Complément de Schur).

Soit $A, B, C, D \in M_n(K)$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n}(K)$.

1. On suppose A inversible. Montrer $\text{dét}(M) = \text{dét}(A)\ \text{dét}(D - CA^{-1}B)$.
2. On suppose en outre que A et C commutent. Montrer que $\text{dét}(M) = \text{dét}(AD - BC)$.

Exercice 27^{++} (Déterminant de Smith).

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice $n \times n$ telle que, pour tous indices $i, j \in [\![1, n]\!]$, $[A]_{i,j}$ est le nombre de diviseurs communs à i et j. Calculer $\text{dét}\, A$.

Exercice 28^{++} (Déterminant de Cauchy).

Soit $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n \in K$ tels que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], a_i + b_j \neq 0$.

Calculer le déterminant de $\left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice 29^{++}. *X*

Soit $x_1, \ldots, x_n \in K$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} & x_1^{k+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{k-1} & x_2^{k+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{k-1} & x_n^{k+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

Exercice 30.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie.

Déterminer $\text{dét}(s)$ en fonction de la dimension de l'espace propre $E_1(s)$.

Déterminants et polynômes

Exercice 31.

On considère l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto P(1 - X)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer $\operatorname{tr} \varphi$ et $\text{dét}\, \varphi$.

Exercice 32.

Soit $E = \{x \mapsto P(x)e^x \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$. Calculer le déterminant de l'endomorphisme de dérivation sur E.

Exercice 33$^+$.

Soit $n \geqslant 2$ et $P = X^n - X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que P est simplement scindé dans $\mathbb{C}$. On note $z_1, \dots, z_n$ ses racines.
2. Calculer le déterminant
$$\begin{vmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+z_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 34.

1. Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels et $(P_0, \dots, P_{n-1})$ une famille échelonnée de polynômes. Calculer le déterminant $\det\left(P_{j-1}(x_i)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ en fonction du déterminant de Vandermonde $V(x_1, \dots, x_n)$.
2. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos((n-1)\theta_1) \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos((n-1)\theta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos((n-1)\theta_n) \end{vmatrix}.$

Exercice 35.

Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ des entiers distincts.

1. Soit $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{R}_n[X]$. Trouver $M \in M_{n+1}(\mathbb{Z})$ telle que
$$\begin{pmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$
2. En déduire l'existence d'un entier $d \in \mathbb{N}^*$ tel que, quel que soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
$$P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n) \in \mathbb{Z} \Rightarrow d\,P \in \mathbb{Z}[X].$$
3. Le résultat précédent reste-t-il vrai si l'on remplace $\mathbb{R}_n[X]$ par $\mathbb{R}_{n+1}[X]$?

Rang et perturbation du déterminant

Exercice 36. ☑

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto \det(A + tB)$ est polynomiale, de degré $\leqslant \operatorname{rg} B$.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto \det(t\,I_n - A)$ est polynomiale et déterminer son degré et ses racines.
3. Trouver une suite de matrices inversibles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$ (où la convergence signifie que, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $[A_n]_{i,j} \xrightarrow[n\to+\infty]{} [A]_{i,j}$).

Exercice 37.
Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, avec B de rang 1. Montrer que $\text{dét}\left((A+B)(A-B)\right) \leqslant (\text{dét}\, A)^2$.

Exercice 38. ☑

1. Soit $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $\text{dét}\, A = 0$.
2. Soit $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que le déterminant de A ne change pas si on ajoute le même nombre à tous les éléments de A.
3. Soit $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $\forall i$, $[A]_{i,i} = 0$ et $\forall i \neq j$, $[A]_{i,j} \in \{\pm 1\}$. Montrer que A est inversible.
4. On dispose de $(2n+1)$ petits cailloux tels que, quel que soit le caillou enlevé, les $2n$ restants peuvent se répartir en deux tas de n cailloux de même masse totale. Montrer que tous les petits cailloux ont la même masse.

Exercice 39.
Soit $n \geqslant 1$. Montrer qu'il existe $J \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $J^2 = -I_n$ si et seulement si n est pair.

Exercice 40$^+$ (Déterminant de Hürwitz et théorème de De Bruijn-Erdős).

1. Soit $a, b, r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$. Calculer $\begin{vmatrix} r_1 & a & a & \cdots & a \\ b & r_2 & a & \cdots & a \\ b & b & r_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & r_n \end{vmatrix}$.
2. En déduire que $\begin{pmatrix} r_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & r_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & r_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$ est inversible dès que $r_i > 1$.
3. En déduire que n points non alignés du plan définissent au moins n droites.

Mélange

Exercice 41.
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

- $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$;
- $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} \neq 0 \Rightarrow a_{j,i} = 0$;
- $\forall i, j, k \in [\![1, n]\!]$, $(a_{i,j} \neq 0 \text{ et } a_{j,k} \neq 0) \Rightarrow a_{i,k} \neq 0$.

Montrer que A est inversible.

Exercice 42.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. À quelle condition a-t-on

$$\forall x_1 < x_2 < x_3, \begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0 \text{ ?}$$

Exercice 43$^+$.
Soit $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $\text{dét}\left(f_i(x_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0$.

Exercice 44. ☑
Montrer que le groupe des inversibles de l'anneau $M_n(\mathbb{Z})$ est $GL_n(\mathbb{Z}) = \left\{M \in M_n(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \text{dét}\, M \in \{\pm 1\}\right\}$.

Exercice 45$^+$.
Soit $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$. On suppose que, pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$, la matrice $A + kB$ est inversible, d'inverse appartenant à $M_2(\mathbb{Z})$. Montrer que $A + 5B$ est inversible, d'inverse appartenant à $M_2(\mathbb{Z})$.

Exercice 46.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que
$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \text{dét}(A + B) = f(\text{dét}\, A, \text{dét}\, B) \text{ ?}$$
2. Quelles sont les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que
$$\forall B \in M_n(\mathbb{R}), \text{dét}(A + B) = \text{dét}(A) + \text{dét}(B) \text{ ?}$$

Exercice 47$^+$.
Soit $A \in M_n(K)$. Montrer que $\text{rg}\,\text{com}(A) \in \{0, 1, n\}$, en précisant dans quels cas chacune des alternatives advient.

Exercice 48$^+$. *X* 💡☑
Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} \geqslant 0$.

Exercice 49$^+$ (Formule de Cauchy-Binet). 💡
Démontrer que si $P \in M_{n,p}(K)$ et $Q \in M_{p,n}(K)$, avec $n \leqslant p$, on a $\text{dét}(PQ) = \sum\limits_{I} \text{dét}\,(P_I)\,\text{dét}\,(Q_I)$, où la somme porte sur les parties $I \in \mathcal{P}_n([\![1, p]\!])$ et où P_I (resp. Q_I) est la matrice carrée d'ordre r obtenue en ne gardant que les colonnes de P (resp. les lignes de Q) dont l'indice appartient à I.

Que peut-on dire dans le cas $n > p$?

Exercice 50$^+$ (Lemme de descente de la similitude).
Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) : B = PAP^{-1}$. Montrer $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) : B = PAP^{-1}$.

Exercice 51^{+++}. *Ulm*

1. Donner des réels $a_1, a_2, \dots, a_{n^2}$ distincts tels que toute matrice possédant ces coefficients soit inversible.
2. Montrer que l'on peut choisir ces coefficients dans $[1, 2]$.

Exercice 52^{+++}. *Ulm*
Soit $n \geqslant 2$ et $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $(t_i)_{i=0}^n$ une famille de $n + 1$ nombres distincts.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\text{dét}(A + t_i B) = 0$.

(ii) Il existe deux sous-espaces vectoriels V, W de $\mathbb{R}^n$ tels que $\dim V > \dim W$ et $\begin{cases} A\,[V] \subseteq W \\ B\,[V] \subseteq W \end{cases}$.