# Espaces euclidiens

## Généralités

### Exemples d'espaces préhilbertiens

**Autocorrection A.** ☑

Montrer que l'application $\langle\cdot|\cdot\rangle : (P,Q) \mapsto \langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

**Exercice 1.**

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'espace E, muni de $\langle\cdot|\cdot\rangle$, est un espace préhilbertien.

(i) $E = C^1([-1,1])$, $\langle\cdot|\cdot\rangle : (f,g) \mapsto \langle f|g\rangle = f(0)\,g(0) + \displaystyle\int_{-1}^1 f'(t)\,g'(t)\,dt$ ;

(ii) $E = \mathbb{R}[X]$, $\langle\cdot|\cdot\rangle : (P,Q) \mapsto \langle P|Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0)\,Q^{(k)}(0)$ ;

(iii) $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\langle\cdot|\cdot\rangle : (P,Q) \mapsto \langle P|Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)\,Q^{(k)}(a_k)$, pour $a_0,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ quelconques.

**Exercice 2.**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$. On considère l'application

$$\langle\cdot|\cdot\rangle : \begin{cases} C^0([0,1]) \times C^0([0,1]) \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} f(a_n)\, f(b_n). \end{cases}$$

À quelle condition $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définit-elle un produit scalaire sur $C^0([0,1])$ ?

**Exercice 3$^+$.**

Soit $w \in C^0([-1,1])$. On définit l'application $\langle\cdot|\cdot\rangle_w : (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\,g(t)\,w(t)\,dt$.

Montrer que $\langle\cdot|\cdot\rangle_w$ est un produit scalaire sur $C^0([0,1])$ si et seulement si $w$ est à valeurs positives et que l'ensemble de ses zéros ne contient aucun intervalle non trivial.

**Exercice 4$^+$.** ☑

Montrer que la formule $\forall f,g \in C^1([0,1]), \langle f|g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f'\,g' + f(1)\,g(0) + f(0)\,g(1)$ définit un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sur $C^1([0,1])$.

## Propriétés des normes dérivant d'un produit scalaire

**Exercice 5 (Stricte convexité de la sphère unité).**

1. Soit E un espace préhilbertien et $x \neq y \in E$ deux éléments tels que $\|x\| = \|y\| = 1$.
   Montrer $\forall t \in ]0, 1[\,, \|(1-t)x + ty\| < 1$.
2. En déduire que la norme uniforme sur $C^0([0, 1])$ ne dérive pas d'un produit scalaire.

**Exercice 6$^{++}$ (Théorème de von Neumann).**

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant *l'identité du parallélogramme*

$$\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Montrer que la norme $\|\cdot\|$ dérive d'un produit scalaire.

**Exercice 7$^{+}$.**

Soit E un espace préhilbertien, $u_1, \dots, u_n \in E$ et $C \in \mathbb{R}$ tels que $\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n, \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i u_i \right\| \leqslant C$.

Montrer $\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 \leqslant C^2$.

## Inégalités (dont Cauchy-Schwarz)

**Autocorrection B.**

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant 2^{n/2}\sqrt{n+1}$.
2. Montrer que, pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $|\operatorname{tr} A| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $M_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer $\left(\sum_{k=1}^{n} x_i\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$.

**Exercice 8.**

Montrer $\forall A, B \in S_n(\mathbb{R}), \big(\operatorname{tr}(AB+BA)\big)^2 \leqslant 4 \operatorname{tr}(A^2) \operatorname{tr}(B^2)$.

**Exercice 9$^{+}$ (Inégalité de Hilbert).**

1. Montrer $\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_{-1}^{1} P^2 = -i \int_0^{\pi} P(e^{i\theta})^2 e^{i\theta}\, d\theta$.
2. En déduire que, pour tous $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{0 \leqslant k, \ell \leqslant n} \frac{a_k a_\ell}{k+\ell+1} \leqslant \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$.

**Exercice 10.**

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et positive. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le moment $s_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$ et la matrice $H_n = (s_{i+j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer $\forall X \in \mathbb{R}^{n+1}, X^T H_n X \geqslant 0$.
2. En déduire $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $s_{p+q}^2 \leqslant s_{2p}\, s_{2q}$, puis montrer cette inégalité directement à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**Exercice 11$^+$ (Déterminants de Gram).**

Étant donné une famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ dans un espace préhilbertien E, on définit le *déterminant de Gram* (ou *gramien*)

$$G(\mathcal{F}) = \text{dét}\left(\langle u_i | u_j \rangle\right)_{i=1}^n .$$

1. On suppose qu'il existe une famille orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ telle que $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ contienne tous les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$. Exprimer les coefficients de $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ à l'aide de produits scalaires, et en déduire l'égalité $M^T M = (\langle u_i | u_j \rangle)_{i=1}^n$.
2. Montrer que $G(\mathcal{F}) \neq 0$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre.
3. Montrer que $G(\mathcal{F}) \geqslant 0$.

## Configurations géométriques

**Exercice 12.**

Soit $(v_i)_{i=1}^3$ une famille de trois vecteurs unitaires d'un espace euclidien E.

On suppose que quels que soient $i \neq j$, $\langle v_i | v_j \rangle = -\frac{1}{2}$. Montrer que les trois vecteurs sont coplanaires.

**Exercice 13$^+$ (Simplexe régulier).**

Soit E un espace euclidien de dimension $n$. Montrer qu'il existe $x_0, x_1, \ldots, x_n \in E$ unitaires tels que $\forall i \neq j \in [\![0, n]\!], \langle x_i | x_j \rangle = -\frac{1}{n}$.

**Exercice 14$^+$ (Familles obtusangles).**

Soit E un espace euclidien et $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E telle que $\forall i \neq j \in [\![1, p]\!], \langle x_i | x_j \rangle < 0$.

Montrer que $p \leqslant 1 + \dim E$.

**Exercice 15$^{++}$.**

Soit E un espace euclidien et $x_1, \ldots, x_p \in E$ tels que $\forall i \neq j \in [\![1, p]\!], \langle x_i | x_j \rangle = -1$.

Montrer $\displaystyle\sum_{i=1}^p \frac{1}{1 + \|x_i\|^2} \leqslant 1$. Quels sont les cas d'égalité ?

# Orthogonalité

**Exercice 16.**

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E. Montrer

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \qquad \text{et} \qquad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

**Exercice 17.**

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $F, G \subseteq E$ deux sous-espaces vectoriels.

Montrer que F et G sont orthogonaux si et seulement si $\forall u \in F, \forall v \in G, \|u+v\| \geqslant \|u\|$.

**Exercice 18$^+$.**

Dans tout l'exercice, on munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt$.

1. Dans cette question, on fixe $n = 2$.
   (a) Donner une base de $\mathrm{Vect}(X, X^2)^\perp$.
   (b) Construire $A_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = \displaystyle\int_0^1 A_2(t)\,P(t)\,dt$.
2. On revient maintenant à $n \in \mathbb{N}$ quelconque.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $A_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \displaystyle\int_0^1 A_n(t)\,P(t)\,dt$.
   (b) Montrer que $\deg A_n = n$.
3. Existe-t-il un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(0) = \displaystyle\int_0^1 A(t)\,P(t)\,dt$ ?

**Exercice 19$^+$ (Décomposition QR et inégalité de Hadamard).**

Soit E un espace euclidien de base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

1. **Groupe orthogonal.**
   (a) On note $O_n(\mathbb{R}) = \left\{Q \in M_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, QQ^T = I_n\right\}$. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, appelé *groupe orthogonal*.
   (b) Montrer $\forall A \in O_n(\mathbb{R}), \det A \in \{\pm 1\}$.
   (c) On considère une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E, et $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
   Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est orthonormée si et seulement si $Q \in O_n(\mathbb{R})$.
2. **Décomposition QR.** Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in T_n^+(\mathbb{R})$ tels que $M = QR$.
3. **Inégalité de Hadamard.** Montrer $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), |\det M| \leqslant \|C_1(M)\| \cdots \|C_n(M)\|$.

**Exercice 20$^+$ (Polynômes de Legendre).**

On munit l'ensemble $C^0([-1,1])$ du produit scalaire $L^2$.

1. Montrer que l'équation différentielle $\big((1-x^2)y'\big)' + n(n+1)\,y = 0$ possède une unique solution polynomiale $P_n$ unitaire et de degré $\leqslant n$, et montrer que celle-ci est de degré $n$ exactement.
2. Montrer que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. Le réel 1 est-il racine de $P_n$ ?
3. On appelle $n$-*ième polynôme de Legendre* le polynôme $L_n = \dfrac{P_n}{P_n(1)}$.
   Montrer que $L_n$ est proportionnel à $\big((1-X^2)^n\big)^{(n)}$.

# Distance, projection

**Autocorrection C.**

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E, et $p$ le projecteur orthogonal sur E. Montrer $\forall x \in E, d(x,F)^2 = \langle x|x - p(x)\rangle$.

**Autocorrection D.**
Calculer les infima suivants :

(i) $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t-(a\sqrt{t}+b)\right)^2 dt\,;$ (ii) $\inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^3-(a+bt+ct^2)\right)^2 dt.$

**Exercice 21.**
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\inf\limits_{S\in S_n(\mathbb{R})} ([M]_{i,j} - [S]_{i,j})^2$.

**Exercice 22.**

1. Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. À quelle condition l'application
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k) \end{array}$$
définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ ?
2. On suppose désormais qu'il s'agit bien d'un produit scalaire. En donner une base orthonormée.
3. Soit $\mathcal{F} = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \,\middle|\, \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$. Déterminer la distance de $X^n$ à $\mathcal{F}$.

**Exercice 23.**
On munit $M_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Calculer
$$\inf\left\{ \|M - \alpha I_n - \beta J_n\| \,\middle|\, (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \right\}.$$

**Exercice 24.**
On munit $E = \mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire $\langle A|B\rangle = \int_0^1 AB$ et on pose $Q = 1 + X + X^2 + X^3 \in E$.

1. Montrer que $F = \left\{ P \in E \,\middle|\, \int_0^1 (t^3 - t)\, P'(t)\, dt = \int_0^1 P \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Calculer $d(Q, F)$.

**Exercice 25.**

1. Montrer que $(f,g) \mapsto \langle f|g\rangle = \int_0^1 \left(fg + f'g'\right)$ est un produit scalaire sur $C^1([0,1])$.
2. On pose $F = \left\{ f \in C^2([0,1]) \,\middle|\, f'' = f \right\}$. Montrer que
$$F^\perp = \left\{ f \in C^1([0,1]) \,\middle|\, f(0) = f(1) = 0 \right\}.$$
3. Déterminer une expression explicite de la projection orthogonale de $C^1([0,1])$ sur F.
4. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose
$$E_{\alpha,\beta} = \left\{ f \in C^1([0,1]) \,\middle|\, f(0) = \alpha, f(1) = \beta \right\}.$$
Montrer l'égalité
$$\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2)\, dt = \frac{(\alpha^2+\beta^2)\operatorname{ch} 1 - 2\alpha\beta}{\operatorname{sh} 1}.$$

**Exercice 26$^+$.**

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on note $I(P) = \displaystyle\int_0^1 \left(t^n - P(t)\right)^2 dt$.

1. Montrer qu'il existe un unique $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ en lequel I atteint son minimum.
2. On considère la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X+n+1} - \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \dfrac{a_j}{X+j+1}$.
   (a) Calculer $F(i)$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.
   (b) En déduire une expression de F.
   (c) Calculer $F(n)$, puis en déduire la valeur de $I(P)$.

**Exercice 27.**

Soit $f \in C^0([0,1])$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx = 1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\,dx \geqslant 4$.

**Exercice 28.**

Soit E un espace préhilbertien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

**Exercice 29.**

Soit E un espace euclidien possédant une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $p \in \mathcal{L}(E)$ le projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel F de E. Calculer $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \|p(e_j)\|^2$ en fonction de $\dim F$.

**Exercice 30$^{++}$.** X

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, et on note $\mathcal{R} = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{rg} M = 1\}$.

1. Montrer $\displaystyle\inf_{M\in\mathcal{R}} \|M - I_n\| = \sqrt{n-1}$.
2. Quels sont les points de $\mathcal{R}$ à distance minimale de $I_n$ ?

# Mélange

**Exercice 31$^+$ (Un (cas particulier d'un) théorème de Grothendieck).**

Soit $V \subseteq C^0([0,1])$ un sous-espace vectoriel et $A > 0$ tels que $\forall f \in V, \|f\|_\infty \leqslant A\,\|f\|_2$.

1. Montrer que V est strictement inclus dans $C^0([0,1])$.
2. Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille orthonormée de V.
   (a) Pour tous $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, majorer $\left\|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i f_i\right\|_\infty$ en fonction de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i^2$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i^2 \leqslant A^2$.
3. Déduire de la question précédente que V est de dimension finie et que $\dim V \leqslant A^2$.
4. Montrer que pour tout $n$, il existe un sous-espace vectoriel $V \subseteq C^0_{pm}([0,1])$ de dimension $n$ et tel que $\forall f \in V, \|f\|_\infty \leqslant \sqrt{n}\,\|f\|_2$.

**Exercice 32$^+$ (Quadrature de Gauss et théorème de Stieltjes).**

1. Montrer qu'il existe une famille échelonnée de polynômes à coefficient réels $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n, m \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_{-1}^{1} L_n L_m = \delta_{n,m}$. Cette famille de polynômes est-elle unique ?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $L_n$ possède $n$ racines simples dans $]-1, 1[$.

Dans la suite, on les notera $-1 < x_{1,n} < \cdots < x_{n,n} < 1$ ces nombres, appelés *nœuds de Legendre*.

3. (a) Montrer qu'il existe un unique $(\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{n,n}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall f \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^{1} f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,n}\, f(x_{k,n}).$$

   (b) Montrer que l'on a même $\forall f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \displaystyle\int_{-1}^{1} f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,n}\, f(x_{k,n})$, et que cette propriété caractérise les nœuds de Legendre.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_{i,n} > 0$ et calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n}$.
5. Soit $f \in C^0([-1, 1])$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} f(x_{i,n})$.

   On admet qu'il existe une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers $f$. Montrer le *théorème de Stieltjes :* $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_{-1}^{1} f$.

**Exercice 33$^+$.**

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ avec la même propriété.

**Exercice 34$^+$.** ☑

Soit E un espace euclidien possédant une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$.

1. Montrer que toute famille $(f_1, \dots, f_n)$ de vecteurs de E vérifiant $\forall k \in [\![1, n]\!], \|f_k - e_k\| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est encore une base de E.
2. La propriété reste-t-elle vraie si l'on remplace l'inégalité stricte par une inégalité large ?