Probabilités II

Exercice 7.
On pourra utiliser habilement la positivité de l'espérance.

Exercice 10.
Pour l'espérance, le calcul de $E(2n - X)$ est techniquement plus facile. Pour la variance, on pourra remarquer que celle de X est égale à celle de $Y = 2n-X$, que l'on peut calculer à l'aide de $E\big(Y(Y+1)\big)$.

Exercice 14.
On pourra procéder par récurrence, et utiliser la formule des espérances totales.

L'inégalité élémentaire constituant le cas $n = 1$ pourra être utile dans la phase d'hérédité.

Exercice 25.
On pourra se souvenir de la méthode des indicatrices !

Autocorrection

Autocorrection A.

- On a

$$\begin{aligned} E\left((X-1)^2\right) &= \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 \, P(X=k) && \text{(transfert)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell^2 \\ &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6}. \end{aligned}$$

- On a

$$\begin{aligned} E\left(e^X\right) &= \sum_{k=1}^{n} e^k \, P(X=k) && \text{(transfert)} \\ &= \frac{e}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} e^\ell \\ &= \frac{e}{n} \frac{e^n-1}{e-1}. \end{aligned}$$

Autocorrection B.

D'après la formule du transfert, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{1}{X+1}\right] &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\,\frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} && \text{(formule d'absorption)} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} p^{\ell-1}(1-p)^{n+1-\ell} && \begin{bmatrix}\ell = k+1\\ k=\ell-1\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(n+1)p}\sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} p^{\ell}(1-p)^{n+1-\ell} \\
&= \frac{1}{(n+1)p}\left(\sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} p^{\ell}(1-p)^{n+1-\ell} - \binom{n+1}{0}p^0(1-p)^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)p}\Big((p+(1-p))^{n+1} - (1-p)^{n+1}\Big) && \text{(binôme de Newton)} \\
&= \frac{1}{(n+1)p}\Big(1-(1-p)^{n+1}\Big).
\end{aligned}$$

Autocorrection C.

- Il est légitime de modéliser la situation par r variables aléatoires indépendants $X_1, \dots, X_r$ suivant toutes la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$, la i-ème variable aléatoire désignant le numéro du tiroir lequel est placée la boule numéro i.

  D'après un résultat du cours, c'est d'ailleurs ce qu'il se passerait si on choisissait comme espace probabilisé fini l'ensemble $\Omega = [\![1,n]\!]^r$, muni de la probabilité uniforme, et que la i-ième variable aléatoire était simplement $\omega = (t_1, \dots, t_r) \mapsto t_i$.
- On a alors $T = \mathbb{1}_{(X_1=1)} + \cdots + \mathbb{1}_{(X_r=1)}$, ce qui donne, par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}
E(T) &= \sum_{i=1}^{r} E\left(\mathbb{1}_{(X_i=1)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} P(X_i = 1) \\
&= \frac{r}{n}.
\end{aligned}$$

- De même,

$$V = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{(X_1\neq j,\dots,X_r\neq j)}$$

$$\text{donc} \qquad \begin{aligned}
E(V) &= \sum_{j=1}^{n} E\left(\mathbb{1}_{(X_1\neq j,\dots,X_r\neq j)}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} P(X_1 \neq j, \dots, X_r \neq j)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} P(X_1 \neq j) \cdots P(X_r \neq j) && \text{(indépendance)}\\
&= n \left(\frac{n-1}{n}\right)^r = \frac{(n-1)^r}{n^{r-1}}.
\end{aligned}
$$

Autocorrection D.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a $P(M \leqslant k) = P(X \leqslant k, Y \leqslant k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$, par indépendance.
2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a

$$P(M = k) = P(M \leqslant k) - P(M \leqslant k-1) = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

   On calcule alors $E(M) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (2k-1)k = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$.
3. On a $N = X + Y - M$, d'où l'on tire $E(N) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.
4. On a

$$
\begin{aligned}
E(N) = \sum_{k=1}^{n} P(N \geqslant k) &= \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k, Y \geqslant k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k+1)^2}{n^2}\\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{\ell=1}^{n} \ell^2\\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.
\end{aligned}
$$

5. *Via* la formule de König-Huygens, c'est un calcul peu éclairant mais facile :

$$V(M) = E(M^2) - E(M)^2 = \frac{n+1}{n} \frac{3n^2+n-1}{6} - \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\right)^2 = \frac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2}.$$

Autocorrection E.

On modélise la situation par deux variables aléatoires $X, Y : \Omega \to [\![1, n]\!]$ telles que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], \quad P(X = j | Y = k) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } j \leqslant k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Loi. La variable aléatoire Y est à valeurs dans $[\![1, n]\!]$.

Quel que soit $j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$
\begin{aligned}
P(Y = j) &= \sum_{k=1}^{n} P(X = k, Y = j)\\
&= \sum_{k=1}^{n} P(Y = j | X = k)\, P(X = k)\\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k}.
\end{aligned}
$$

Espérance. On a

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{j=1}^{n} j\, P(Y=j) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{j}{k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} j \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \frac{k(k+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} (k+1) \\
&= \frac{1}{2} \frac{2+(n+1)}{2} \\
&= \frac{n+3}{4}.
\end{aligned}
$$

Variance. On a

$$
\begin{aligned}
E\left(Y^2\right) &= \sum_{j=1}^{n} j^2\, P(Y=j) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{j^2}{k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} j^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\
&= \frac{1}{6n} \sum_{k=1}^{n} (2k^2+3k+1) \\
&= \frac{1}{6n} \left[2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} + n \right] \\
&= \frac{1}{18}(n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}(n+1) + \frac{1}{6} \\
&= \frac{2(2n^2+3n+1)+9(n+1)+6}{36} \\
&= \frac{4n^2+15n+17}{36}.
\end{aligned}
$$

On obtient la variance

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(Y) &= E\left(Y^2\right) - E(Y)^2 \\
&= \frac{4n^2+15n+17}{36} - \left(\frac{n+3}{4}\right)^2 \\
&= \frac{7n^2+6n-13}{144}.
\end{aligned}
$$

Autocorrection F.

(i) Clairement U est à valeurs dans $\{0,1,2\}$ et V est à valeurs dans $\{-1,0,1\}$, mais en outre, les deux nouvelles variables aléatoires prennent automatiquement des valeurs de même parité. On en déduit que $\operatorname{im}(U,V) \subseteq \{(0,0),(2,0),(1,-1),(1,1)\}$. On peut alors donner la loi du couple en listant toutes les possibilités

$$\begin{aligned} P(U=0,V=0) &= P(X=0,Y=0) && \text{(car les événements sont égaux)} \\ &= P(X=0)P(Y=0) && \text{(car } X \perp\!\!\!\perp Y\text{)} \\ &= (1-p)^2. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} P(U=2,V=0) &= P(X=1,Y=1) = p^2 \\ P(U=1,V=-1) &= P(X=0,Y=1) = p(1-p) \\ P(U=1,V=1) &= P(X=1,Y=0) = p(1-p). \end{aligned}$$

(ii) On voit directement, en n'écrivant que les termes non nuls, que

$$\begin{aligned} & E(V) = P(V=1) - P(V=-1) = p(1-p) - p(1-p) = 0 \\ \text{et} \quad & E(UV) = P(U=1,V=1) - P(U=1,V=-1) = p(1-p) - p(1-p) = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\operatorname{cov}(U,V) = E(UV) - E(U)E(V) = 0.$$

(iii) Les variables U et V sont décorrélées d'après la question précédente, mais elles ne sont pas indépendantes. On vérifie en effet (par exemple) que

$$\begin{cases} P(U=2) = p^2 > 0 \\ P(V=1) = p(1-p) > 0 \end{cases} \quad \text{mais} \quad P(U=2,V=1) = 0 \neq P(U=2)P(V=1).$$

Autocorrection G.

- La première inégalité est simplement l'inégalité triangulaire.
- Pour la seconde, on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux variables $|X|$ et 1 :

$$E(|X|) = E(|X|\ 1) \leqslant \sqrt{E\left(|X|^2\right)}\sqrt{E\left(1^2\right)} = \sqrt{E\left(X^2\right)}.$$