Probabilités II

Espérance

Autocorrection A. ☑

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Calculer $E\left((X-1)^2\right)$ et $E\left(e^X\right)$.

Autocorrection B. ☑

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de la variable $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

Exercice 1.

On considère un dé pipé à 6 faces, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k. On note X la valeur de la face obtenue.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance. Comparer avec un dé non pipé.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, puis son espérance.

Exercice 2. ☑

1. Soit X et Y indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Calculer $E\big(|X-Y|\big)$.
2. Même question avec la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

Exercice 3. ☑

Soit $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable binomiale $X \sim \mathcal{B}(2n, p)$ et on définit $Y = \lfloor X/2 \rfloor$.

1. Calculer $E\left[(-1)^X\right]$.
2. Par linéarité de l'espérance, en déduire $E(Y)$.

Exercice 4$^+$.

Dans une urne contenant n boules blanches et n boules noires, on prélève successivement et sans remise les boules. On note X le nombre de tirages nécessaire à l'obtention de toutes les boules noires.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer son espérance.

Exercice 5.

1. On suppose que deux variables aléatoires réelles X et Y coïncident sur un événement A. Montrer $E[X|A] = E[Y|A]$.
2. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{B}(p)$ et $N : \Omega \to [\![1, n]\!]$. On suppose que toutes ces variables sont indépendantes.

   Calculer l'espérance de la somme $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

Méthode des indicatrices

Autocorrection C. ☑

On considère r boules numérotées de 1 à r et n tiroirs numérotés de 1 à n. On place au hasard chacune des r boules dans l'un des n tiroirs.

On note T le nombre de boules placées dans le tiroir 1 et V le nombre de tiroirs restés vides.

Déterminer l'espérance de ces deux variables aléatoires.

Exercice 6.

Soit $n \geqslant 2$ et $r \in [\![2, 2n]\!]$ deux entiers.

Sur l'arche d'Utnapishtim sont présents $2n$ animaux, deux pour chacune des n espèces représentées.

Pour visiter une île, il choisit (aléatoirement, uniformément) r animaux parmi les $2n$.

On note N le nombre d'espèces dont les deux représentants sont choisis parmi les r. Calculer $E(N)$.

Moments d'ordre deux

Autocorrection D. ☑

Soit $n \geqslant 2$ et $X, Y \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ indépendantes. On pose $N = \min(X, Y)$ et $M = \max(X, Y)$.

1. Calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(M \leqslant k)$.
2. En déduire la loi de M et son espérance.
3. En utilisant la linéarité de l'espérance, calculer $E(N)$.
4. Retrouver $E(N)$ en utilisant la formule $E(N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(N \geqslant k)$.
5. Calculer $V(M)$.

Autocorrection E. ☑

On tire au hasard un entier X entre 1 et n, puis de nouveau au hasard un entier Y entre 1 et X.

1. **Analyse de l'énoncé.** Interpréter l'énoncé comme vous donnant la loi de X et la loi conditionnelle de Y sachant $(X = k)$, pour tout k.
2. Calculer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Exercice 7.

Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer $V(X) \leqslant \dfrac{(\max X - \min X)^2}{4}$ et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 8.

Soit $r \leqslant n$ deux entiers non nuls, et $Y \sim \mathcal{U}\left(\mathcal{P}_r([\![1, n]\!])\right)$. On définit $X = \max Y$.

1. Déterminer la loi de X. Quelle identité combinatoire obtient-on ?
2. Calculer l'espérance $E(X)$.
3. Calculer la variance $V(X)$.

Exercice 9 (Loi hypergéométrique).

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note N le nombre de boules noires obtenues.

1. Déterminer la loi de N.
2. Calculer l'espérance de N.
3. Calculer l'espérance de $N(N-1)$, puis la variance de N.

Exercice 10$^+$.

On tire sans remise dans une urne contenant n boules rouges et n boules noires, jusqu'à avoir tiré toutes les boules rouges. On note X le nombre de boules noires restant dans l'urne à ce moment-là.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Calculer sa variance.

Covariance

Autocorrection F.

Soit X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p \in]0,1[$ sur le même espace probabilisé. Soit $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer :

(i) la loi du couple (U, V) ;

(ii) la covariance de U et V ;

(iii) si U et V sont indépendantes.

Exercice 11.

Soit $n \geqslant 2$ et $p, q \in [0,1]$ tels que $p + q = 1$.

On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires de loi conjointe

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \forall k \in [\![1,n]\!], P(X=j, Y=k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k = j \text{ et } j \neq 0 \\ \dfrac{q^n}{n} & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Donner les lois marginales du couple, et les espérances de X et Y.
2. (a) Soit $j \in [\![0,n]\!]$. Donner la loi de Y sachant $(X = j)$.
   (b) Calculer l'espérance correspondante.
3. (a) Montrer que pour tout $q \in]0,1[$, $P(X=1, Y=1) \neq P(X=1)P(Y=1)$.
   (b) Calculer la covariance de X et Y et montrer qu'elle s'annule pour une valeur de q.
   (c) Qu'en déduire ?

Exercice 12.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

On définit $Z = X - Y$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z.
2. Déterminer la loi de Z.
3. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathrm{cov}(X, Z)$.

Exercice 13.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles de carrés intégrables, avec $\mathrm{var}(X) > 0$. Déterminer a et b réels minimisant la quantité $E\left[(Y-(aX+b))^2\right]$.

Exercice 14^{++} (Inégalité de Fortuin, Kasteleyn et Ginibre).

Soit n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes $T_1, \dots, T_n$. On appelle *variable aléatoire croissante* toute variable aléatoire $X = f(T_1, \dots, T_n)$, avec $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ croissante (pour l'ordre produit).

Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires croissantes, alors $\mathrm{cov}(X, Y) \geqslant 0$.

Méthode des indicatrices

Exercice 15.

Soit $n \geqslant 2$. On considère $E \sim \mathcal{U}(\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket))$. On définit, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'événement $A_i = (i \in E)$.

1. Déterminer la loi des indicatrices $\mathbb{1}_{A_i}$ et montrer qu'elles sont indépendantes.
2. On définit la variable aléatoire $N = |E|$.
   Exprimer N en fonction des indicatrices $\mathbb{1}_{A_i}$ et en déduire sa loi, son espérance et sa variance.
3. On définit la variable aléatoire $T = \sum_{i \in E} i$.
   Exprimer T en fonction des indicatrices $\mathbb{1}_{A_i}$ et en déduire son espérance et sa variance.

Exercice 16.

Une urne contient $2n$ boules. Parmi ces boules, n portent le numéro 0 et les n autres portent les numéros de 1 à n. On tire n boules de l'urne. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si la boule portant le numéro i a été tirée, à 0 sinon.

1. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, déterminer la loi de X_i.
2. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, déterminer la covariance $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$.
3. Soit S la somme des numéros tirés. Déterminer l'espérance et la variance de S.

Exercice 17.

Dans un groupe de n personnes, chacun laisse son parapluie à l'accueil d'un restaurant. En partant, chacun reprend un parapluie au hasard. On note X le nombre de personnes ayant repris le bon parapluie.

1. Quelle est l'espérance de X ?
2. Quelle est la variance de X ?

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Autocorrection G.

Montrer que, pour toute variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $E(X) \leqslant E(|X|) \leqslant \sqrt{E(X^2)}$.

Exercice 18.

Soit X et Y deux variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \geqslant 1$.

Exercice 19^{+}.

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé. Montrer que $|P(A \cap B) - P(A)\,P(B)| \leqslant 1/4$ et caractériser le cas d'égalité.

Inégalités de concentration

Exercice 20. ☑

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne $X_n \sim \mathcal{B}(4n, 1/2)$.

1. Calculer la variance de X_n.
2. Montrer que la suite $(P(|X_n - 2n| \geqslant n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
3. Montrer que la suite $(P(|X_n - 2n| \leqslant n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{3n} \binom{4n}{k}$. Déterminer un équivalent simple de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 21⁺.

Soit X_n une variable uniforme sur $\{0,1\}^n$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{\|X_n\|}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

c'est-à-dire que $\dfrac{\|X_n\|}{\sqrt{n}}$ converge vers $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ en probabilité.

Exercice 22⁺ (Inégalité de Hoeffding).

1. Soit S_n une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$. Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\forall s \in \mathbb{R}, P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant e^{-nsa}\left(1 - p + pe^s\right)^n.$$

2. Parmi les majorations de la question précédente, identifier la plus précise.
3. Si $0 < q < p < 1$, on définit la *divergence de Kullback–Leibler*

$$D(p\|q) = (1-p)\ln\left(\frac{1-p}{1-q}\right) + p\ln\left(\frac{p}{q}\right).$$

   Exprimer $D(p\|q)$ comme une intégrale et en déduire que $D(p\|q) \geqslant 2(p-q)^2$.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2e^{-2n\varepsilon^2}$.

Objets mathématiques aléatoires

Exercice 23.

On tire aléatoirement une partie X de $[\![1,n]\!]$, toutes les possibilités étant équiprobables.

1. Quelle est l'espérance de $|X|$?
2. Quelle est l'espérance de $\displaystyle\sum_{k\in X} k$?

Exercice 24$^+$.

Soit $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi, donnée par

$$P(X_{i,j}=1)=P(X_{i,j}=-1)=\frac{1}{2}.$$

On considère la matrice (aléatoire) $M=(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $D=\text{dét}\, M$.

Calculer l'espérance et la variance de M.

Exercice 25$^+$.

Soit $n\geqslant 2$ un entier. On considère une permutation aléatoire Σ ou, plus précisément, une variable aléatoire $\Sigma\sim\mathcal{U}(\mathfrak{S}(n))$.

1. **Images de 1 et 2. Nombre d'inversions.**
   (a) Calculer $P(\Sigma(1)<\Sigma(2))$.
   (b) Les variables $\Sigma(1)$ et $\Sigma(2)$ sont-elles indépendantes ?
   (c) Donner les lois de $\Sigma(1)$ et $\Sigma(2)$, ainsi que leur loi conjointe.
   (d) Calculer la probabilité que $\Sigma(1)$ et $\Sigma(2)$ soient des entiers voisins.
   (e) Calculer l'espérance du nombre d'inversions de Σ.
2. **Points fixes.** Déterminer l'espérance et la variance du nombre de points fixes de Σ.
3. **Montées.** La *première montée* d'une permutation σ est le plus grand intervalle entier de la forme $[\![1,k]\!]$ sur lequel la restriction σ est croissante.
   Déterminer la loi et l'espérance de la longueur de la première montée de Σ.
4. **Records.** Étant donné une permutation σ, on dit que $i\in[\![1,n]\!]$ est un *record* pour σ si

$$\forall j\in[\![1,n]\!], i<j\Rightarrow\sigma(i)<\sigma(j).$$

   (a) Calculer l'espérance et la variance du nombre R_n de records de Σ.
   (b) Montrer que $\forall\varepsilon>0, P\left(\left|\frac{X_n}{\ln n}-1\right|>\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
5. **Cycles.** Soit $C\subseteq[\![1,n]\!]$ une partie non vide. On dira pour abréger que C *est un cycle* d'une permutation pour dire que c'est l'un des cycles de la décomposition en cycles disjoints de ladite permutation.
   (a) Calculer la probabilité que C soit un cycle de Σ.
   (b) Calculer la probabilité que 1 et 2 appartiennent au même cycle de Σ.
   (c) Calculer la loi du cardinal du cycle de Σ contenant 1.

Mélange

Exercice 26.

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles. On suppose $\forall k\in\mathbb{N}, E(X^k)=E(Y^k)$. Montrer $X\sim Y$.

Exercice 27 (Fonctions génératrices).
Si Z est une variable aléatoire à valeurs entières, on définit le polynôme

$$g_Z = E(X^Z) = \sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k)\, X^k \in \mathbb{R}[X],$$

et on l'appelle *fonction génératrice de* Z.

1. Montrer que la loi de Z est entièrement déterminée par g_Z.
2. Montrer que, si Z_1 et Z_2 sont indépendantes, alors $g_{Z_1+Z_2} = g_{Z_1} g_{Z_2}$.

$$g_{Z_1+Z_2} = g_{Z_1} g_{Z_2}.$$

3. Soit $Z \sim \mathcal{B}(n, p)$. Déterminer g_Z.
4. Retrouver grâce aux questions précédentes la loi de la somme $Z_1 + Z_2$, quand Z_1 et Z_2 sont des variables aléatoires indépendantes telles que $Z_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Z_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$.
5. On lance deux à six faces éventuellement pipés. On note Z_1 et Z_2, respectivement, le résultat de ces deux lancers, et $T = Z_1 + Z_2$ le total des points obtenus.
   (a) Montrer que T ne suit pas la loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.
   (b) On suppose que T suit la même loi que dans le cas où les dés sont équilibrés. Montrer qu'ils le sont.