Fonctions de deux variables

Exercice 3.

Les généralisations à deux variables du théorème des bornes atteintes et du théorème de Heine se montrent comme dans le cas d'une variable. On pourra notamment utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass, vu en cours pour des suites à valeurs complexes, mais qui est évidemment vrai (et dit la même chose) pour des suites à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6.

On pourra montrer les équations de Cauchy-Riemann dans le cas de polynômes très simples, puis montrer que des propriétés de stabilité par combinaison linéaire et par produit.

Exercice 11.

Pour la première question, on pourra considérer la fonction $g : (x, y) \mapsto f(x + y, x - 2y)$.

Exercice 12.

Il vaut mieux avoir fait l'exercice « continuité sous le signe somme » avant d'attaquer celui-ci !

Notamment, l'uniforme continuité peut être utile.

Exercice 13.

Pour la deuxième question, on pourra étudier $x \mapsto f(x, -1)$ et $x \mapsto f(x, x)$.

Exercice 17.

1. Utiliser l'associativité de la loi $*$.
2. On pourra vérifier $\partial_2 f(e, e) = 1$, puis utiliser ce fait et la question précédente pour montrer que la fonction $y \mapsto \partial_2 f(y, e)$ ne s'annule pas.

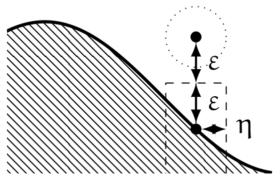
Autocorrection

Autocorrection A.

1. Quel que soit $p \in \mathbb{R}^2$, on a évidemment $D(p, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$.
2. Soit $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Posons $r = \|p\| > 0$.
   On a $(0, 0) \notin D(p, r)$, car $\|p - (0, 0)\| = r$. Cela montre $D(p, r) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
3. Soit $p = (a, b) \in]0, 1[^2$; posons $r = \min\{a, 1 - a, b, 1 - b\} > 0$.
   Montrons $D(p, r) \subseteq]0, 1[^2$. Soit $z = (x, y) \in D(p, r)$.
   On a $(x-a)^2 \leqslant (x-a)^2+(y-b)^2 = \|(x, y) - (a, b)\|^2 < r^2$, donc $|x - a| < r$ par stricte croissance de la fonction racine carré, ce qui donne $a - r < x < a + r$.
   En particulier, les inégalités $r \leqslant a$ et $r \leqslant 1 - a$ montrent :
   $$0 \leqslant a - r < x < a + r \leqslant 1,$$
   ce qui donne $x \in]0, 1[$. On montre de la même façon $y \in]0, 1[$, ce qui donne $z \in]0, 1[^2$, et conclut.

4. Notons $U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > \cos(x) \right\}$; soit $p = (a, b) \in U$.

Notons $\varepsilon = \dfrac{b - \cos(a)}{2} > 0$. Par continuité de la fonction cosinus, on peut trouver $\eta > 0$ tel que :



$$\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |\cos(x) - \cos(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $r = \min\{\eta, \varepsilon\} > 0$. Montrons $D(p, r) \subseteq U$.
Soit $z = (x, y) \in D(p, r)$.
Comme dans la question précédente, on obtient $|x - a| < r \leqslant \eta$ et $|y - b| < r \leqslant \varepsilon$.
En particulier, la première inégalité entraîne que $|\cos(x) - \cos(a)| \leqslant \varepsilon$, ce qui donne :

$$y - \cos(x) > (b - \varepsilon) - (\cos(a) + \varepsilon) = \big(b - \cos(a)\big) - 2\varepsilon \geqslant 0,$$

et montre $z \in U$.

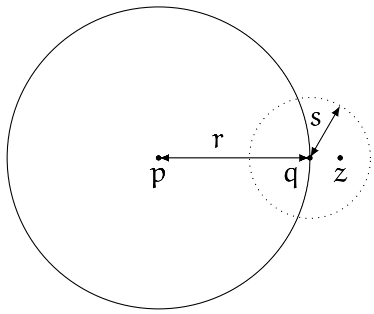
Autocorrection B.

Considérons $q = (a + r, b)$.

Comme $\|q - p\| = r$, on a $q \in \overline{D}(p, r)$. On va montrer qu'aucun disque ouvert centré en q n'est inclus dans $\overline{D}(p, r)$.
Soit $s > 0$.
Considérons le point $z = (a + r + s/2, b)$.

- Comme $\|z - q\| = s/2 < s$, on a bien $z \in D(q, s)$.
- Comme $\|z - p\| = r + s/2 > r$, on a $z \notin \overline{D}(p, r)$.

Cela montre que le disque $D(q, s)$ n'est pas inclus dans $\overline{D}(p, r)$, et conclut.



Autocorrection C.

On trouve :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \frac{\partial f_1}{\partial x}(a, b) = \frac{1}{b} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(a, b) = -\frac{a}{b^2} \ ;$$
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \frac{\partial f_2}{\partial x}(a, b) = -\frac{1}{a^2 b^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(a, b) = -\frac{2}{a b^3} \ ;$$
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \frac{\partial f_3}{\partial x}(a, b) = \ln(ab) + 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(a, b) = \frac{a}{b} \ ;$$
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \dfrac{\partial f_4}{\partial x}(a, b) = 2x\, e^{-x} \cos\left(x^2 + y^2\right) - e^{-x} \sin\left(x^2 + y^2\right) \\ \qquad \dfrac{\partial f_4}{\partial y}(a, b) = 2y\, e^{-x} \cos\left(x^2 + y^2\right). \end{cases}$$

Autocorrection D.

- L'application partielle $\nu_1 : x \mapsto N(x, 0) = |x|$ n'étant pas dérivable en 0, la fonction N n'admet pas de première dérivée partielle en 0. Il en va de même pour la deuxième dérivée partielle.
- L'application $N^2 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ appartient clairement à $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, par opérations, avec :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial (N^2)}{\partial x}(a, b) = 2a \quad \text{et} \quad \frac{\partial (N^2)}{\partial y}(a, b) = 2b.$$

Il s'ensuit que sa restriction à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est encore de classe C^1. Elle est par ailleurs à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition, la fonction racine carrée étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la restriction de $N = \sqrt{N^2}$ à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est de classe C^1, avec :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \frac{\partial N}{\partial x}(a,b) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial y}(a,b) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Autocorrection E.

La fonction θ est de classe C^1 d'après la première règle de la chaîne.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\theta'(a) = 2a \frac{\partial f}{\partial x}(a^2, a^3) + 3a^2 \frac{\partial f}{\partial y}(a^2, a^3).$$

Autocorrection F.

1. On applique la deuxième règle de la chaîne aux fonctions $\varphi : (x,y) \mapsto y$ et $\psi : (x,y) \mapsto x$. Ces fonctions étant de classe C^1, on a $u_1 \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
   Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

   $$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(a,b) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(a,b) = 1,$$

   donc :

   $$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x}(a,b) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(a,b), \psi(a,b)\big) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(a,b), \psi(a,b)\big) \frac{\partial \psi}{\partial x}(a,b) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(b,a). \end{aligned}$$

   De la même façon :

   $$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial y}(a,b) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(a,b), \psi(a,b)\big) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(a,b), \psi(a,b)\big) \frac{\partial \psi}{\partial y}(a,b) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(b,a). \end{aligned}$$

2. On applique la première règle de la chaîne à $g : x \mapsto x$ (qui va jouer le rôle des deux fonctions g et h). Puisque g est de classe C^1, on a $u_2 \in C^1(\mathbb{R})$, et l'on a, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

   $$\begin{aligned} u_2'(a) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(g(a), g(a)\big)\, g'(a) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(g(a), g(a)\big)\, g'(a) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,a). \end{aligned}$$

   Notons que l'on aurait pu également appliquer la formule de dérivation par rapport à un vecteur au point $p = (0,0)$ et au vecteur $v = (1,1)$.

3. D'après la question précédente, la fonction ne dépendant que d'une variable $\psi : (x,y) \mapsto f(x,x) = u_2(x)$ est de classe C^1 et, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

   $$\frac{\partial \psi}{\partial x}(a,b) = u_2'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y}(a,b) = 0.$$

   La fonction $\varphi : (x,y) \mapsto y$ étant également de classe C^1, on peut appliquer la deuxième règle de la chaîne et obtenir que $u_3 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ avec, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

   $$\frac{\partial u_3}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(a,b), \psi(a,b)\big) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(a,b), \psi(a,b)\big) \frac{\partial \psi}{\partial x}(a,b)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial f}{\partial y}\big(b, f(a,a)\big)\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,a)\right)\\
\text{et}\qquad \frac{\partial u_3}{\partial y}(a,b) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(a,b), \psi(a,b)\big)\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(a,b), \psi(a,b)\big)\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(a,b)\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\big(b, f(a,a)\big).
\end{aligned}
$$

4. On applique la première règle de la chaîne à la fonction u_3 et à $g : x \mapsto x$ (qui joue le rôle des deux fonctions g et h). On a donc $u_4 \in C^1(\mathbb{R})$ et, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
u_4'(x) &= \frac{\partial u_3}{\partial x}\big(g(a), g(a)\big)\ g'(a) + \frac{\partial u_3}{\partial y}\big(g(a), g(a)\big)\ g'(a)\\
&= \frac{\partial f}{\partial y}\big(a, f(a,a)\big)\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,a)\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\big(a, f(a,a)\big).
\end{aligned}
$$

Autocorrection G.

1. On a

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b) = \sin(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b) = 2b,$$

donc les points critiques de f_1 forment l'ensemble $\{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Les extrema locaux de f_1 sont à chercher parmi ces points.

- Si $k \in \mathbb{Z}$ est pair, $k\pi$ est un maximum local de la fonction cosinus. Le point $(k\pi, 0)$ n'est alors ni un maximum local (car $f_1(k\pi, \varepsilon) > f_1(k\pi, 0)$ pour tout $\varepsilon > 0$) ni un minimum local (car $f_1(k\pi + \varepsilon, 0) < f(k\pi, 0)$ pour tout $\varepsilon \in]0, 2\pi[$).
  Ce point critique n'est donc pas un extremum local.
- Si $k \in \mathbb{Z}$ est impair, on a $f(k\pi, 0) = -1$. Or, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f_1(x,y) = \cos(x) + y^2 \geqslant -1$, donc ce point critique est un minimum global.

2. On a :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b) = 3\,e^{3a}\,b^2 + e^a\,b \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b) = 2\,e^{3x}\,y + e^x.$$

Comme $3\,e^{3a} + e^a > 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(a,b)$ ne s'annule que si $b = 0$. Or,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \frac{\partial f_2}{\partial y}(a, 0) = e^x > 0,$$

donc les deux dérivées partielles ne s'annulent pas simultanément.
On en déduit que f_2 n'a pas de point critique, et donc pas d'extremum global.

3. On a :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f_3}{\partial x}(a,b) = 6a - 2b - 8 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f_3}{\partial y}(a,b) = -2a + 6b + 8.$$

Après résolution du système linéaire, on trouve un seul point critique : $(1, -1)$, en lequel la fonction vaut -8. Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a alors après calcul :

$$f_2(1+h, -1+k) + 8 = 3h^2 - 2hk + 3k^2.$$

Si $k = 0$, cette quantité est clairement positive. Si $k \neq 0$, on peut mettre sous forme canonique :

$$f_2(1+h, -1+k) + 8 = 3\left(h - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}k^2 \geqslant 0,$$

d'où l'on déduit que :

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, f_1(1+h,-1+k) \geqslant f(1,-1)$$

et l'unique point critique $(1,-1)$ de f_3 est son minimum.

4. On a :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \dfrac{\partial f_4}{\partial x}(a,b) = \arctan(b)\ \exp\big(a\ \arctan(b)\big) \\ \dfrac{\partial f_4}{\partial y}(a,b) = \dfrac{a}{1+b^2}\ \exp\big(a\ \arctan(b)\big). \end{cases}$$

On en déduit facilement que le seul point critique de f_4 est l'origine (avec $f_4(0,0) = 1$).
Or, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on voit que $f_4(a,b) - 1$ est du même signe que $a\ \arctan(b)$, c'est-à-dire du signe de $a\,b$. On en déduit que l'origine n'est pas un extremum local.
La fonction f_4 n'a donc pas d'extremum local.